Exercices en ECT-ECG.
Sommes et récurrence.

Exercice 1. Exprimer à l'aide du Symbole $\sum$ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{15}$.
2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + ... + \frac{10}{1024}$.
3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + ... + \frac{a^n}{n}$.
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + ... + 50$.

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{k=1}^{n}(2.k+1)$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} 3^{2k}$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n}(2^k + k^2 + 1)$.
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$.

Exercice 3. Calculer en fonction de n les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}), \quad T_n = \sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{k+1}{k}), \quad U_n = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+2) - \ln(k)).$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer par récurrence les égalités suivantes à connaitre par coeur :

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$. Remarquez que : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (\sum\limits_{k=1}^{n} k)^2$.

Exercice 5. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2 + 4^{n+k}}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2.$$

Exercice 6. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.
Remarquer que : $k = (k+1) - 1$.

Exercice 7. Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall k \geqslant 2 : \quad \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

En déduire la valeur de : $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 8. Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4 : \; 2^n \leqslant n!$.
2. $\forall x \geqslant 0, \forall \in \mathbb{N} : \quad (1+x)^n \geqslant 1 + n.x$.
3. $\forall n \geqslant 1 : \quad \sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 9. Démontrer par récurrence le résultat suivant :

$$\forall n \geqslant 1 : \quad 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2.$$

Exercice 10. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 1 : \; \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$