Complément MP-MP*//Théorème de Baire.

Soit $(E; ||.||)$ un espace vectoriel sur un $\mathbb{R}$ espace normé Complet.
On notera $B(x, r)$ (resp $\overline{B}(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon $r > 0$.
On considére une suite $(O_n)_{n \geqslant 1}$ d'ouverts de E, telle que pour tout $n \geqslant 1$, l'adhérence $\overline{O_n}$ de O_n est égale à E (ainsi O_n est dense dans E).

1. Soit $A \subset E$:
   Montrer que : A est dense dans E si et seulement si pour tout ouvert non vide U de E on a : $A \cap U \neq \emptyset$.
2. Soit U un ouvert non vide de E.
   Montrer que l'on peut trouver une suite décroissante de boules $(B(x_n, \epsilon_n))_{n \geqslant 1}$ c'est à dire :
   $$B(x_1, \epsilon_1) \supset B(x_2, \epsilon_2) \supset ... \supset B(x_n, \epsilon_n) \supset ...$$
   Avec pour tout $n \geqslant 1$:
   $$0 < \epsilon < \frac{1}{n}, \quad et \quad \overline{B}(x_n, \epsilon) \subset U \cap \bigcap_{i=1}^{n} O_i.$$
3. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy.
4. Montrer que $U \cap \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} O_i \neq \emptyset$.
5. Conclure que :
   $$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i} = E.$$
6. Montrer que si $(F_n)_n$ est une suite de fermés d'intérieurs vides de E alors $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide dans E.

Remarque :
On montre facilement qu'un sous espace vectoriel de E distinct de E est d'intérieur vide. On en déduit que si E est evn de dimension infinie, Complet, (qui n'est pas d'intérieur vide) ne peut pas être réunion dénombrable de sous espace vectoriel de dimensions finies (dont on sait qu'ils sont fermés). En particulier E ne peut admettre de base dénombrable. C'est ainsi que $\mathbb{R}[X]$ qui admet une base dénombrable n'est complet pour aucune norme !.