

Complément MP-MP* // Borel Lebesgue-Borel Weierstrass.

Soit $(E; \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .
On dit que A vérifie la propriété de **Borel-Lebesgue** si et seulement si de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous-recouvrement fini ce qui s'écrit :
 $\forall (O_i)_{i \in I}$ famille d'ouverts de E tels que : $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ alors il existe $J \subset I$ tel que : J est fini et
 $A \subset \bigcup_{i \in J} O_i$.

1. Montrer que A vérifie **B.L** si et seulement si :
 $\forall (F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E tel que : $(\bigcap_{i \in I} F_i) \cap A = \emptyset$ alors il existe $J \subset I$ tel que :
 J est fini et $(\bigcap_{i \in J} F_i) \cap A = \emptyset$.
2. En déduire que si A vérifie **B.L** alors A est fermé.
3. Soit A un sous-ensemble de E qui vérifie la propriété de **Bolzano-Weierstrass** (C'est à dire de toute suite d'éléments de A on peut extraire une suite convergente dans A).

(a) Montrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in A : \bigcup_{i=1}^n \overline{B}(a_i, \epsilon) \supset A.$$

(b) Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A .

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\forall a \in A, \exists i \in I : \overline{B}(a, \epsilon) \subset O_i$.
(ϵ est appelé nombre de lebesgue du recouvrement ouvert).

(c) En déduire que A vérifie la propriété de **Borel-Lebesgue**.

4. On suppose maintenant que A vérifie la propriété de **Borel-Lebesgue**.
Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de A , on pose : $X_N = \{u_n, n \geq N\}$.
5. Prouver que : $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N} \neq \emptyset$.
6. Soit $x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N}$, montrer qu'il existe une suite $(u_{\varphi(n)})_n$ extraite tel que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
En déduire que A vérifie la propriété de **Borel-Weierstrass**.