Complément MP-MP*.
Réduction et topologie matricielle.

1 Méthodes :

1.1 Remarques :

1. 0 est valeur propre de A ssi A n'est pas inversible.
2. A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres et le même ordre de multiplicité.
3. Une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre est diagonalisable ssi elle est de la forme $\lambda.I_n$.

1.2 Pour trouver les valeurs propres d'une matrice on pourra :

1. Regarder si la somme des coefficients sur chaque ligne est constante auquel cas cette somme est valeur propre et le vecteur dont tous les coordonnées sont égales à 1 est vecteur propre.
2. Regarder s'il y a des valeurs évidentes de λ telles que la matrice $A - \lambda.I$ est non inversible, le rang de la matrice nous donnant alors la dimension du sous-espace propre associé.
3. Manipuler le polynôme caractéristique en faisant des manipulations sur les lignes ou les colonnes pour faire apparaitre des factorisations.
4. Utiliser un polynôme annulateur.

2 Pour démarrer :

Exercice 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}]$ à diagonale dominante est inversible.

Exercice 2. Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ est nilpotent si, et seulement si, il vérifie :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \quad tr(u^k) = 0.$$

3 Réduction simulatnée :

1. Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, diagonalisables. Démontrer que u et v commutent si et seulement si ils sont diagonalisables dans la même base, c'est à dire si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres à la fois de u et de v.
   Énoncer ce résultat en termes de matrices.
2. Dans cette question on suppose que u et v commutent et sont trigonalisables, mais on ne les suppose plus diagonalisables. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre en commun. Utiliser ce résultat pour montrer que u et v sont simultanément trigonalisables.
   Énoncer aussi ce résultat en termes de matrices.
3. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Démontrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales.
4. Peut-on énoncer un résultat analogue à celui de la question précédente mais pour une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux ?

4 Calcul pratique de polynôme minimal en dimension finie :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in E$ non nul, on note $E_u(x) = vect\{u^k(x),\ k \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Montrer que $E_u(x)$ est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant x et stable par u.
   (b) Montrer que si la dimension de $E_u(x)$ est k alors la famille $B_x = \{x, u(x), ..., u^{k-1}(x)\}$ est une base de $E_u(x)$.
   On notera u_x l'endomorphisme induit par u sur $E_u(x)$, et on pose : $u^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i.u^i(x)$.
   (c) Montrer que le polynôme caractéristique de u_x est : $\chi_{u_x}(X) = (-1)^k.(X^k - \sum_{i=0}^{k-1} ai.X^i)$.
   (d) Déterminer le polynôme minimal π_{u_x} de u_x.

   Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.
   Pour tout i variant de 1 à n soit u_i l'endomorphisme induit par u sur $E_i = E_u(e_i)$ et π_i son polynôme minimal.
2. Montrer que le polynôme minimal π_u de u est le p.p.c.m $(\pi_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$.
3. Exemple :
   Soit la matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. En considérant la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ déterminer $E_1,\ E_2,\ E_3$.
5. Déterminer π_1 et π_2.
6. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
7. Justifier pourquoi il n'est pas nécessaire de calculer E_3 pour déterminer π_u.
8. Déterminer π_u.

5 Réduction : Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension finie non nulle n. On appelle p l'indice de nilpotence de u, c'est-à-dire le plus petit entier naturel pour lequel $u^p = 0$. Démontrer que u est triogonalisable. Quel est le polynôme minimal de u, son polynôme caractéristique ? Démontrer que $p \leqslant n$. u peut-il être diagonalisable ?
2. Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension finie non nulle n. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé. On note $\lambda_1, ..., \lambda_q$ ses racines, de multiplicités respectives $m_1, ..., m_q$.
   On note pour chaque i entre 1 et q : $E_i = Ker[[\lambda_i.Id - u)^{m_i}]$, F_i est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.
   (a) Démontrer que F_i est stable par u et contient le sous-espace propre $E_i = Ker[[u - \lambda_i.Id)]$ associé à la valeur propre λ_i.
   (b) Démontrer que E est somme directe des F_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$.
   (c) Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si $F_i = E_i$ pour tout i.
3. On se place sous les hypothèses de la question précédente. On appelle u_i l'endomorphisme induit par u sur F_i, et p_i la projection sur F_i parallélement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$.

(a) Démontrer que u_i s'écrit comme somme d'une homothétie h_i et d'un endomorphisme nilpotent n_i de F_i.

(b) Construire, en utilisant ce qui précéde, deux endomorphismes d et n, respectivement diagonalisable et nilpotent, tels que :

$$u = d + n \quad et \quad d \circ n = n \circ d.$$

Cette derniére décomposition est appelée : décomposition de Dunford.

4. Interprétation matricielle : Toute matrice M s'écrit donc comme somme $D+N$ d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent. Quel est l'intérêt pour le calcul des puissances des matrices ?
5. Montrer l'unicité du couple (d, n).
6. Application : Démontrer qu'une matrice carrée complexe est diagonalisable si et seulement si son exponentielle l'est.

6 Le polynôme minimal dépend-t-il du corps de base ?

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de , $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\pi_{A,\mathbb{K}}$ et $\pi_{A,L}$ le polynome minimal de A dans $\mathbb{K}[X]$ et $L[X]$ respectivement.
On se propose de montrer que le polynôme minimal est indépendant du corps de base c'est à dire :

$$\pi_{A,L} = \pi_{A,\mathbb{K}}.$$

On pose : $d' = \deg(\pi_{A,L})$, $\quad d = \deg(\pi_{A,\mathbb{K}})$.

1. Justifier pourquoi le système : $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est $\mathbb{K}$-libre dans $M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que le système $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est L-libre dans $M_n(L)$.
3. En déduire que $d = d'$ puis que :
$$\pi_{A,L} = \pi_{A,\mathbb{K}}.$$

Ennoncer le résultat dans le cas particulier : $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad L = \mathbb{C}.)$

7 Exemple de recherche d'éléments propres en dimension infinie :

$E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On définit $u \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad u(f) = \begin{cases} f(0) & si \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\ dt & si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que :
$$\forall f \in E,\ u(f) \in E.$$
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de u.
On définit : $E_0 = \{fonctions \quad constantes\}$, $\quad E_1 = \{f \in E / f_{\mathbb{R}_-} = 0\}$, $\quad E_2 = \{f \in E / f_{\mathbb{R}_+} = 0\}$.
3. Montrer que chaque E_k est un sous espace vectoriel de E stable par u, on note u_k l'endomorphisme induit par u sur E_k.
4. Déterminer les valeurs propres de u_1 et ses sous espaces propres associés.
5. Déterminer les valeurs propres de u_2 et ses sous espaces propres associés.
6. Vérifier que : $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.
7. Déterminer les valeurs propres de u et ses sous espaces propres.

8 Polynôme minimal de u en a.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.

1. Montrer que pour tout $a \in E$ il existe un unique polynome $\pi_{u,a}$ unitaire vérifiant :
   (a) $\pi_{u,a}(u)(a) = 0$.
   (b) $\forall P \in \mathbb{K}[X] : \quad P(u)(a) = 0 \Rightarrow \pi_{u,a}/P$.

   $\pi_{u,a}$ est appelé polynôme minimal de u en a.
2. Montrer que : $\forall a \in E : \quad \pi_{u,a}/\pi_u$.
3. On se propose dans cette question de montrer qu'il existe $a \in E$ tel que : $\pi_u = \pi_{u,a}$.
   (a) Commencons par supposer que π_u est primaire, c'est à dire une puissance d'un irréductible P_i :
   $\pi_u(X) = P_i^k(X)$.
   Montrer que $a \in E \backslash Ker(Pi^{k-1})$ convient.
   (b) Soit maintenant : $\pi_u(X) = \prod_{i=1}^{k} P_i^{k_i}(X)$ avec les P_i sont irréductibles.
   En prenant $\forall i \in [|1,k|] : \quad a_i \in Ker(P_i^{k_i}(u) \setminus ker(P_i^{k_i-1})(u)$ et $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$:
   Montrer que : $\pi_{u,a} = \pi_u$.
   (c) Soit $a \in E$ et $E_u(a) = vect\{u_i(a), \ i \in \mathbb{N}\}$ appelé sous-espace cyclique engendré par a.
      i. Montrer que : $dim(E_u(a)) = deg(\pi_{u,a})$.
      $\pi_{u,a}$ permet alors d'obtenir la plus courte relation de liaison entre les $u_i(a)$.
      ii. vérifier que $(a, u(a), ..., u^{k-1}(a))$ est une base de $E_u(a)$ avec $k = deg(\pi_{u,a})$.

9 Topologie Matricielle :

Exercice 3. Montrer que $\mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En déduire que : $\chi_{A.B} = \chi_{B.A}$ pour tout $A, \ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A-t-on $\mathcal{G}L_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{G}L_n(\mathbb{R})$?

Exercice 4. Montrer que les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Qu'en est-t-il du cas réel ?
Une preuve du théorème de Cayley Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ utilisant un argument de densité !!