

Complément MP-MP*

Familles sommables.

1 Méthodes :

1.1 Pour prouver :

1. Une famille de réels positifs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ converge, de plus on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2. Une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable ssi les familles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ le sont (ce qui revient à ce que les séries convergent) et dans ce cas on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{-n} = u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{-n}.$$

3. Une famille de réels ou de complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels ou complexes est sommable ssi la famille $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est. Ceci revient à la convergence de la série $\sum |u_n|$, et dans ce cas on :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

1.2 Les grands Théorèmes :

Théorème 1 (Convergence commutative).

Si la série de réels ou complexes $\sum u_n$ converge absolument alors pour tout $\sigma \in S(\mathbb{N})$, la série permutée $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Théorème 2 (Somme par paquets :).

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de réels ou complexes et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de I vérifiant :

$$\forall n \neq m, I_n \cap I_m = \emptyset, \text{ et } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I.$$

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable alors chaque famille $(u_i)_{i \in I_n}$ l'est aussi et la série $\sum (\sum_{i \in I_n} u_i)$ converge absolument, et on a :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Théorème 3 (Sommes doubles et Formule de Fubini).

Soit $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes. On a équivalence entre :

1. La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m |u_{m,n}|$ converge et la série $\sum_n \sum_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}|$ converge.
3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n |u_{m,n}|$ converge et la série $\sum_m \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}|$ converge.

De plus dans ce cas on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}.$$

Théorème 4 (Produit de Cauchy).

Si les séries à variables réels ou complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la famille $(u_m \cdot v_n)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, la série produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_m \cdot v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

1.3 Exemples d'applications :

Exercice 1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\sigma(n)}}$ où $\sigma \in S(\mathbb{N})$.

Exercice 2. Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n.$$

Exercice 4. Montrer que :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2).$$

Exercice 5. On pose : $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$, pour $n > 1$. Montrer que :

$\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1)$ converge et calculer sa somme.

1.4 Les classiques :

Exercice 6. Etablir que pour $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.$$

Avec $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n .

Exercice 7. Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$.

Montrer que la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 8. Soit $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Justifier l'existence et calculer :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Exercice 9. Montrer que :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1) = 1, \text{ et } \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p (\zeta(p) - 1) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 10. Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $u_{n,p} = 0$ sinon.

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que la famille $(u_{n,p})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable et montrer que sa somme S_p est égale à $\frac{3}{4p^2}$.
2. En déduire que la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

1.5 Pour aller plus loin :

Exercice 11. Rappeler le théorème concernant la sommation des relations de comparaison.

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que :

$$\int_{-1}^1 P(t) dt + i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0.$$

En déduire que :

$$\int_0^1 P^2(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

2. Soient $2n$ réels positifs $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{a_k b_l}{k+l} \leq \pi \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{l=1}^n b_l^2}.$$

3. Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes de carrés sommables. Montrer que la suite double $(\frac{a_k b_l}{k+l})_{(k,l) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Théorème 5 (Le critère de condensation de Cauchy).

Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs, établir l'équivalence :

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge} \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} \text{ converge} \right).$$

Application 1. Déterminer la nature des séries :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^2}.$$

Remarque. Il est fortement conseillé d'appliquer le théorème de condensation de Cauchy aux exemples précédents, c'est immédiat et efficace.

Question :

Le nombre 2 joue-t-il un rôle important dans l'énoncé du théorème ? Peut-on énoncer un résultat plus général ?