

Complément MP-MP*

Applications du théorème du point fixe.

Exemple d'application du Théorème du point fixe :

On pose $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction f de E telle que :

$$\forall x \in [0, 1] : f(x) = 1 + 2 \cdot \int_0^x \frac{t \cdot f(t)}{1 + t^2} dt.$$

2. Déterminer f .

Application du Théorème du point fixe au problème de Cauchy-Lipschitz :

Soit l'équation différentielle :

$$x' = f(t, x). \quad (0.1)$$

avec f est une fonction continue de deux variables (t, x) sur l'ensemble :

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset U.$$

Satisfaisant la condition de Lipschitz en x :

$$\exists L \geq 0 : |f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|, \forall (t, x), (t, x') \in D.$$

On se propose de montrer qu'il existe une unique solution $x = \phi(t)$ de l'équation différentielle (1) définie sur un intervalle de la forme $]t_0 - d; t_0 + d[$ avec $d \leq a$ et satisfaisant la condition initiale : $\phi(t_0) = x_0$.

1. Montrer qu'une fonction ϕ est solution de l'équation (1) vérifiant la condition initiale : $\phi(t_0) = x_0$ si et seulement si ϕ est solution de l'équation intégrale :

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds. \quad (0.2)$$

Considérons l'application :

$$A : \phi \longmapsto A\phi \text{ telle que : } (A\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Soit :

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, |t - t_0| \leq r, |x - x_0| \leq b\} \subset D, \text{ avec } r \leq a.$$

Désignons par Ω la famille de toutes les fonctions continues sur le segment $[t - r, t_0 + r]$ dont les graphes sont inclus dans G .

2. Montrer que $(\Omega, \|\cdot\|_\infty)$ est Complet.
3. Justifier pourquoi $\forall \phi \in G$ l'application :
 $t \in [t_0 - a, t_0 + a] \mapsto f(x, \phi(x))$ est bornée.
4. Trouver r tel que les deux conditions du théorème du point fixe suivantes soient vérifiées.

$$\begin{cases} \phi \in G \implies A\phi \in G. \\ \exists k \in [0, 1[: \|A\phi - A\psi\|_\infty \leq k \cdot \|\phi - \psi\|_\infty, \quad \forall \phi, \psi \in G. \end{cases}$$

5. Conclure !