

Complément MP-MP*

Suites et séries de fonctions.

1 Méthodes :

1.1 Pour prouver

- L'étude de toute convergence doit commencer par la convergence simple.
- Pour prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) sur A on peut :
 - Majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite $(\alpha_n)_n$ (ne dépendant pas de x) qui tend vers 0.
 - Etudier les variations de $f_n - f$.
- Pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme, on pourra :
 - Chercher une suite (x_n) telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0.
 - Prouver que les (f_n) sont continues et f non continue.
 - Prouver que l'on ne peut intervertir des limites et limite et intégrale.
- Pour prouver la convergence uniforme d'une série de fonctions sur A on peut :
 - Prouver la convergence normale sur A , en majorant $|f_n(x)|$ indépendamment de $x \in A$ par le terme général a_n d'une série convergente.
 - Majorer $R_n(x)$ indépendamment de x par le terme général d'une suite convergente vers 0, en utilisant par exemple le critère spécial des séries alternées.
- Pour prouver qu'une série ne converge pas uniformément on peut :
 - Prouver que la suite ne converge pas uniformément vers 0.
 - Chercher une suite (x_n) de point de A telle que la suite $(R_n(x_n))$ ne converge pas vers 0.
- Pour prouver la continuité d'une limite de fonctions sur un intervalle I , on peut prouver la continuité sur tout segment inclus dans I (de même pour les différentes classes), et donc la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I .

1.2 Erreurs à éviter

- Lorsque l'on parle de convergence uniforme ou normale, il faut absolument préciser :
 - Si on parle de suites ou séries.
 - De quelle suite ou série on parle.
 - Sur quel ensemble cette convergence a lieu.
 - Par rapport à quelle variable la convergence est uniforme ou normale.
- Pour intervertir limite et dérivation, pour utiliser le théorème du cours, il faut prouver la convergence uniforme de la suite des dérivées, et non de la suite elle-même.
- La convergence uniforme sur tout segment inclus dans l'intervalle I n'entraîne pas la convergence uniforme sur I .

2 Savoir-faire :

Exercice 1. Etudier la suite de fonctions définie sur \mathbb{C} par :

$$f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = th(x+n) - th(x).$$

1. Etablir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Justifier que la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .
3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : S(x+1) - S(x) = 1 - th(x).$$

4. Etudier S en $+\infty$.

Exercice 3. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}^+)^2$, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p}.$$

3 Les classiques :

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

1. On suppose que :

$$\forall n \in [0, p], \int_a^b t^n f(t) dt = 0. (p \in \mathbb{N})$$

Montrer que f s'annule au moins $p+1$ fois sur le segment $[a, b]$.

2. On suppose maintenant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t) dt = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

3. Calculer : $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx$.

En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x) dx = 0.$$

4. Interpréter les résultats des questions 1 et 2 en termes d'orthogonalité à $\mathbb{R}_p[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. Soit (f_n) une suite de fonctions polynômiales à coefficients réels.

Montrer que si $(f_n)_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f alors f est polynômiale.

Exercice 6. Fonction zêta de Riemann.

On pose :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la fonction ζ est définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
2. Etudier la monotonie et convexité de la fonction ζ .
3. Déterminer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+ .

5. En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz établir que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.
6. Pour quels valeurs de x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?
7. En posant : $F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$.
Montrer que F est continue sur $] -1, 1[$ et de classe C^1 sur $] -1, 1[$.
Donner une expression simple de $F(x)$.

Exercice 7. Fonction zêta alternée de Riemann.

On pose : $\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de ζ_2 en 0^+ .
3. Etablir la relation : $\zeta_2(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

4 Pour aller plus loin :

Exercice 8. Théorèmes de Dini.

Soit $a < b$ dans \mathbb{R} , $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue f .

— On se propose de montrer :

2ème Théorème de DINI : si chaque fonction f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.

Supposons que chacune des fonctions f_n est croissante et soit $\epsilon > 0$.

1. Montrer l'existence d'une subdivision : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que : $\forall x, y \in [a_i, a_{i+1}[$: $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon' = \frac{\epsilon}{5}$.
2. Montrer l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow \forall i, |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \epsilon'$.
3. Soit $x \in [a, b]$, Supposons que $x \in [a_i, a_{i+1}[$. Pour tout $n \geq n_0$, en utilisant ce qui précède et la croissance de f_n , montrer que :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2\epsilon' + (f_n(x) - f_n(a_i)).$$

4. En déduire, toujours en utilisant la croissance de f_n , que :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2\epsilon' + (f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i)).$$

Puis finalement :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 5\epsilon'.$$

5. Conclure!

— On se propose de montrer :

1er Théorème de DINI : si la suite f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.

Soit maintenant une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$.

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas d'une suite décroissante $(g_n)_n$ tendant simplement vers 0, ce que l'on suppose à partir de maintenant.
2. Montrer que la suite $(\|g_n\|_\infty)_n$ est décroissante et qu'elle converge vers un réel $\alpha \geq 0$.
3. Montrer que pour tout n , $K_n = \{x \in [a, b] : |g_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}$ est un fermé, non vide à partir d'un certain rang, et que $K_{n+1} \subset K_n$.
4. Montrer que l'intersection des K_n est non vide et conclure. (Utilise le théorème des compacts emboîtés : une suite décroissante de compacts non vides possède une intersection non vide.)

Exercice 9. Exemple de fonction continue nulle part dérivable.

Soient $a \in]0, 1[$, $b \in \mathbb{N}^*$ un entier pair vérifiant : $a.b > 1 + \pi$. et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n . e^{ib^n \pi x}.$$

On se propose de montrer que f est continue partout et nulle part dérivable.

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $h = \frac{1}{b^m}$, montrer que :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = S_{m-1} - 2.a^m . b^m . e^{i\pi b^m x}$$

, avec :

$$|S_{m-1}| = \left| \sum_{n=1}^{m-1} a^n e^{ib^n x \pi} \frac{e^{i\pi b^n h} - 1}{h} \right| \leq \pi . \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1}.$$

3. Montrer que : $\pi . \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} < a^m . b^m$.
4. En déduire que :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \geq (a.b)^m.$$

5. Conclure.

Exercice 10. On appelle série de Dirichlet toute série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Remarquer que la fonction ζ de Riemann et la fonctions zêta alternée de Riemann sont des cas particuliers des séries de Dirichlet.

De même qu'une série entière a un disque de convergence, une série de Dirichlet a un demi-plan de convergence.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (a) Il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum \frac{a_n}{n^{z_0}}$ soit convergente.
 - (b) Il existe un nombre réel α tel que, $a_n = O(n^\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$.
 - (c) Il existe un nombre réel positif ρ tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge normalement sur le demi-plan $\Re(z) \geq \rho$.
2. Vérifier que si la série de Dirichlet converge absolument en z_0 , alors elle converge absolument sur le demi-plan $\Re(z) \geq \Re(z_0)$.

On définit alors des "abscisses de convergence" par :

$$\sigma = \inf \left\{ \Re(z) / z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum \frac{a_n}{n^z} \text{ converge} \right\}.$$

$$\sigma_{abs} = \inf \left\{ \Re(z) / z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum \frac{a_n}{n^z} \text{ converge absolument} \right\}.$$

$$\tau = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} / a_n = O(n^\alpha) \}.$$

3. Montrer que la somme $z \mapsto D(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z}$ est continue sur le demi plan $\Re(z) > \sigma$.
4. Montrer que la somme $z \mapsto D(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z}$ est de classe C^∞ sur le demi-plan $\Re(z) > \sigma$ et donner les dérivées successives de la somme D .