Révision probailités ECG : Variables aléatoires discrètes.

1 Résumé de Cours :

1.1 Définitions d'une variable aléatoire discréte

- Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire discréte si l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ peut être indexé par une partie de $\mathbb{N}$: $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, l'ensemble $[X = x_i]$ est un événement c'est à dire que : $[X = x_i] \in \mathcal{A}$.
- On distingue les variables aléatoires discrétes finies et infinies pour lesquelles I est finie ou non.
- **Loi d'une variable aléatoire discréte**
  Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discréte, on dit que l'on connait la loi de X si l'on connait :
  — $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
  — Pour tout $x_i \in X(\Omega)$, $\ p_i = P([X = x_i])$.

1.2 Espérance d'une variable aléatoire discréte

- **Définition**
  — Si $X(\Omega)$ est fini et $(x_i, p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la loi de X, alors l'espérance de X est donné par :
  $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.p_i.$$
  — Si $X(\Omega)$ est infini et $(x_i, p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la loi de X, alors X admet une espérance si la série $\sum_{i\geqslant 0} x_i.p_i$ est absolument convergente (ou la famille $(x_i.p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable). Dans ce cas l'espérance de X est donnée par :
  $$E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i.p_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i.p_i.$$
- Si $X = a$, alors $E(X) = a$.
- L'espérance est linéaire autrement dit si X et Y sont deux variables aléatoires discrétes admettant des espérances et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $a.X + b.Y$ est une variable aléatoire discréte, admet une espérance et on a :
  $$E(a.X + b.Y) = a.E(X) + b.E(Y).$$

- Interprétation de l'espérance : $E(X)$ se traduit comme étant la moyenne des valeurs que prend la variable X.
- **Théorème de Transfert** Soit X une variable aléatoire discréte tel que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et g une applcation définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $Y = g(X)$ est une variables aléatoire discréte, Y admet une espérance si et seulement si la famille $(g(x_i).P([X = x_i]))_{i\in I}$ est sommable et on a :
$$E(g(X)) = \sum_{i\in I} g(x_i).P([X = x_i]).$$

1.3 Variance d'une variable aléatoire discréte

- La variance d'une variable aléatoire discréte X est définie (quand elle existe) par :
$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2.$$
- L'écart type est la racine carré de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- La variance si elle existe est positive et vérifie : $V(a.X + b) = a^2.V(X)$ ou $a, b \in \mathbb{R}$.
- La variance renseigne sur la position des valeur de la variable X par rapports à leur moyenne $E(X)$.