

Cours MP-PSI : Intégrales dépendant d'un paramètre.

1 – Convergence dominée pour une suite de fonctions

Théorème 1.

(Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si :

1. Pour tout n ; f_n est continue par morceaux et intégrable sur I .
2. $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I .
3. Il existe une fonction ϕ continue par morceaux sur I , positive et intégrable sur I telle que : pour tout entier n , $|f_n| \leq \phi$. (Hypothèse de domination)

Alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$.

2 – Intégration terme à terme sur un intervalle

Théorème 2.

(Théorème Intégration terme à terme d'une série de fonctions)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si :

1. Pour tout n ; f_n est continue par morceaux et intégrable sur I .
2. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme une fonction S continue par morceaux sur I .
3. La série $\sum (\int_I |f_n|)$ converge.

Alors La fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I , $N_1(S) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n)$ et :

$$\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

3 – Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 3.**(Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre)**

Soit f une fonction à valeurs complexe sur $A \times I$, ou A est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Si :

1. Pour tout x de A , $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
2. Pour tout t de I , $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .
3. Il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
 $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \phi(t)$. (Hypothèse de domination),

Alors la fonction g définie sur A par : $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

Remarque 1. En fait, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination sur tout compact inclus dans A , c'est à dire à remplacer la condition 3 par : Pour tout compact K contenu dans A , il existe une fonction ϕ_K continue par morceaux et intégrable sur I telle que : $\forall (x, t) \in K \times I, |f(x, t)| \leq \phi_K(t)$. (Hypothèse de domination locale.)

4 – Dérivation sous le signe intégrale**Théorème 4.****(Dérivation sous le signe intégrale)**

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelle ou complexe définie sur $A \times I$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si :

1. f est k fois dérivable par rapport à x sur $A \times I$.
2. Pour tout x de A et tout $p \in [1, k]$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I .
3. $\forall p \in [1, k]$ il existe une fonction ϕ_p continue par morceaux sur I , positive et intégrable sur I telle que :
 $\forall (x, t) \in A \times I, |\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)| \leq \phi_p(t)$ (Hypothèse de domination)

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^k sur A et $\forall x \in A, \forall p \in [1, k]$:
 $g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt$.

Remarque 2. 1. Le caractère C^p étant une propriété locale, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination sur tout compact inclus dans A .

2. g est de classe C^∞ si et seulement si g est de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.