Cours MPSI : Dénombrement.

1 Résumé de Cours :

1.1 Ensembles finis :

1. E et F sont équipotents s'il existe une bijection de E sur F.
2. E est dénombrable si E est équipotent à $\mathbb{N}$.
3. E est un ensemble fini si E est vide ou il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E est équipotent à $\{1, 2, ..., n\}$. Dans ce cas, la cardinal de E, noté $card(E)$, est 0 si E est vide, n dans l'autre cas.
4. $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$.
5. $card(E \cup F \cup G) = card(E) + card(F) + card(G) - card(E \cap F) - card(E \cap G) - card(F \cap G) + card(E \cap F \cap G)$.
6. $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$.
7. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

1.2 p-listes d'un ensemble E à n éléments.

1. Une p-liste d'éléments de E est un p-uplet de E c'est à dire un élément de E^p.
2. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.
3. Le nombre d'applications de E_p dans F_n est : n^p.

1.3 p-liste d'éléments distincts de E à n éléments.

1. Une p-liste d'éléments distincts de E est une p-liste $(x_1, ..., x_p)$ d'éléments de E telle que : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$. (appelée arrangement de p parmi n)
2. Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
3. Une permutation de E est toute n-liste d'éléments distincts de E. Le nombre des permutation est $n!$.
4. Le nombre des bijections de E_n dans F_n $(n = p)$: $n!$.

1.4 Parties de E à p éléments, Combinaisons.

1. Une combinaison à p éléments d'un ensemble E est toute partie de E contenant p éléments
2. Le nombre des combinaisons à p éléments de E à n éléments se note $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ et l'on a : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

3. pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$.
4. Soit E un ensemble de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
5. Formule de Pascal : pour $1 \leqslant p \leqslant n$, $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$.
6. Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} a^{n-p} b^p$.