# Cours ECT-ECT-MPSI-PCSI : Espaces probabilisés finis.

## 1 Résumé de Cours :

### 1.1 Vocabulaire :

1. $\Omega$ est l'univers ou univers des possibles.
2. Toute partie de $\Omega$ est appelée événement.
3. Tout élément de $\Omega$ est appelé événement élémentaire.
4. L'événement $A \cup B$ se lit $A$ *ou* $B$, l'événement $A \cap B$ se lit $A$ *et* $B$.
5. Deux événements $A$ et $B$ sont dits incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$.
6. $\emptyset$ est appelé événement impossible et $\Omega$ événement certain.
7. Pour tout événement $A$, son complémentaire $\overline{A}$ est appelé l'événement contraire de $A$.

### 1.2 Probabilité :

Une probabilité $P$ est une application $P$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans le segment $[0, 1]$ satisfaisant :

1. $P(\Omega) = 1$ (normalisation)
2. si $A$ et $B$ sont deux événements incomaptibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité)

Dans ce cas le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé un espace probabilisé.

### 1.3 Propriétés :

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(\overline{A}) + P(A) = 1$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ estde cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'additivité donne :
   (a) Si $P$ est une probabilité, elle est déterminée par la donnée des nombres $p_k = P(\{\omega_k\})$.
   (b) Réciproquement, avec $n$ nombres réels positifs $p_1, ..., p_n$ de somme 1, on définit une probabilité $P$ en posant $P(\{\omega_k\}) = p_k$.

### 1.4 Equiprobabilité :

Il y a équiprobabilité quand la probabilité est uniforme, c'est à dire quand $p_1 = ... = p_n = \frac{1}{n}$.
Dans ce cas on :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombres\ de\ cas\ possibles}.$$

### 1.5 Indépendance :

Deux événements $A$ et $B$ sont dits indépendants ssi : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

### 1.6 Probabilité conditionnelle :

Soient $A$ et $B$ deux événements tel que $P(A) \neq 0$, on appelle probabilité de $B$ sachant $A$ le réel noté et défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B}{P(A)}.$$

$P_A$ est une probabilité.
Si $A$ et $B$ sont deux événements de probabilité non nulles, alors on a :
$A$ et $B$ sont indépendants $\Longleftrightarrow P_A(B) = P(B) \Longleftrightarrow P_B(A) = P(A)$.

### 1.7 Formules :

Soient $(A_1, A_2, ..., A_n)$ une partition de $\Omega$ (On dit systéme complet d'événements en abrégé **S.C.E**) telle que les $P(A_i)$ sont non nuls et $B$ un événement alors on a :

1. Formule de probabilités totale :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B).P(A_i).$$

2. Formule de Bayes : Si $P(B) \neq 0$ on a :

$$P_B(A_j) = \frac{P_{A_j}(B).P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B).P(A_i)}.$$

3. Formule de probabilités composées :
   Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \neq 0$. alors on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1 \cap A_2}(A_3)...P_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n).$$