

Sujet classique de concours ECG.

Matrices magiques.

Problème 1 :

Partie 1 : Étude de trois matrices

On note A , J et S les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$. En déduire que $\mathbf{Sp}(A) = \{0\}$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $\mathbf{Sp}(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J .
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie 2 : Étude des matrices magiques

Soit $n \geq 3$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant :

- $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,
- pour tout i de $[[1; n]]$, $\ell_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$,
- pour tout j de $[[1; n]]$, $c_j(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,j}$,
- $d_1(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$ et $d_2(M) = \sum_{i=1}^n m_{i, n-i+1}$,

alors :

M est magique si et seulement si : $\forall (i, j) \in [[1; n]]^2, \quad \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$.

Si M est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée **somme** de la matrice M .

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n , et on admet que $\mathcal{E}_n$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer que ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admettra dans la suite que, pour tout i de $[[2; n]]$ et pour tout j de $[[1; n]]$, les applications ℓ_i, c_j, d_1, d_2 et s sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_n$ de somme nulle.

Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$.

7. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que ${}^t M$ est aussi un élément de $\mathcal{E}_n$ et déterminer $s({}^t M)$.
8. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$,
avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
9. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Problème 2 :

Partie 1 : Étude d'une matrice.

On considère, dans cette partie, les matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A , deux matrices P_1 et P_2 de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A.$$

Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2 .

2. (a) Calculer les matrices P_1^2 , $P_1 P_2$, $P_2 P_1$ et P_2^2 .
(b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.
3. Trouver au moins une matrice B de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.
4. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Dans toute la suite du problème, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E .

On note e l'endomorphisme identité de E qui, à chaque élément de E , associe lui-même, et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E qui, à chaque élément de E , associe l'élément nul de E .

On suppose qu'il existe un entier m de $\mathbb{N}^*$, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes $p_1, \dots, p_m$ de E tous différents de $\tilde{0}$, tels que : $\forall k \in \llbracket 0; m \rrbracket, f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$.

Enfin on considère les polynômes :

$$N = \prod_{\ell=1}^m (X - \lambda_\ell) \text{ et pour tout } i \text{ de } \llbracket 1; m \rrbracket, M_i = \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq m \\ \ell \neq i}} (X - \lambda_\ell) \text{ et } L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$: $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Partie 2 : Étude des puissances de f

5. Montrer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$: $P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$.
6. En déduire : $N(f) = \tilde{0}$.
7. (a) Montrer que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1; m \rrbracket^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égale à 1 si $i = j$ et égal à 0 si $i \neq j$.
(b) En déduire, pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$: $L_i(f) = p_i$.
8. (a) Montrer : $e = \sum_{i=1}^m p_i$.
(b) En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\text{Im}(p_1), \dots, \text{Im}(p_m)$.
9. Soit i appartenant à $\llbracket 1; m \rrbracket$.
(a) Vérifier : $N = M_i(\lambda_i)(X - \lambda_i)L_i$.
(b) En déduire, en utilisant le résultat de la question 6. : $\text{Im}(p_i) \subset \text{Ker}(f - \lambda_i e)$.
10. Déduire des questions précédentes que f est diagonalisable, que les valeurs propres de f sont les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et que, pour i de $\llbracket 1; m \rrbracket$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i est $\text{Im}(p_i)$.
11. (a) Montrer, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1; m \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$: $p_i \circ p_j = \tilde{0}$.
(b) En déduire, en utilisant le résultat de la question 8.a., pour i de $\llbracket 1; m \rrbracket$: $p_i \circ p_i = p_i$.
(c) Établir, pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$: $p_i \circ f = \lambda_i p_i$.
12. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$, puis, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

Fin de l'épreuve.