Devoir surveillé ECG.
Suites, plynômes et probabilités.

Exercice 1. Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}:\ u_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+5}.u_n$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{(n+1)^\alpha.u_{n+1}}{n^\alpha.u_n}$.
   (a) Justifier que la suite $(v_n)_n$ est bien dfinie.
   (b) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisnage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
   Monter que : $\forall n \in \mathbb{N} : \ln(v_n) = (\alpha+1).\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{5}{2.n})$.
   Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln(v_n)$ est-elle convergente ?
   (c) Expliciter, pour $n_i n\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(v_k)$ et en déduire l'existence d'un réel strictement positif C tel que : $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.
   Qu'en déduit-on pour la série $\sum u_n$?
2. (a) Justifier l'existence d'un réel strictement positif D tel que : $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=0}^{n} k.u_k \leqslant D.\sqrt{n}$.
   (b) Etablir pour tout entier naturel n, la relation :
   $$2.\sum_{k=1}^{n+1} k.u_k + 3.\sum_{k=2}^{n+1} = 2.\sum_{k=0}^{n} k.u_k + 2.\sum_{k=0}^{n} u_k.$$
   (c) En déduire la valeur de : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2. Soit n un entier au moins égal à 2.
Pour tout P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $f(P) = (X+1)(X+3).P' - n.X.P$.

1. Monter que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de f de valeur propre associée λ.
   (a) Monter que $deg(P) = n$.
   (b) Monter que les seuls racines complexes éventuelles de P sont (-1) et (-3).
   En déduire que$P$ est de la forme $a.(X+1)^k.(X+3)^l$ avec $a \in \mathbb{R}/\{0\}$ et $(k,l) \in [|0;n|]^2$.
   et tel que :$k+l=n$.
3. Pour $k \in [|0;n|]$, on pose : $P_k = (X+1)^k.(X+3)^{n-k}$.
   Calculer $f(P_k)$. En déduire les valeurs propres de f et la dimension de ses sous-espaces propres.
4. Qu'en déduit-on pour l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire réelle X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Le cinéma comporte $N \geqslant 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N.
Pour $i \in [|1;N|]$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'événement $[X = N]$, puis la loi de X_i.
2. Préciser sans clacul la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

4. Déterminer le coéfficient de corrélation entre X_1 et X_2.
5. les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Fin de l'épreuve.