Devoir surveillé ECT*.
Sommes et suites numériques.

Exercice 1. On considère la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{8u_n + 2}{2u_n + 5}, \quad et \quad u_0 \in \mathbb{R}^+.$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ \frac{8x+2}{2x+5} \leqslant 2 + \frac{4}{9}(x-2)$.
2. On suppose dans cette question que $u_0 \in [0; 2]$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0; 2]$.
   (b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).
   (c) Justifier la convergence de la suite u et donner sa limite.
3. On suppose dans cette question que $u_0 = 4$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant 2$.
   (b) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \leqslant 2 + \frac{4}{9}(u_n - 2)$.
   (c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_n - 2 \leqslant 2(\frac{4}{9})^n$.
   (d) En déduire que la suite u est convergente et donner sa limite.
   (e) Déterminer un rang n_0 à partir duquel on est sur que u_n est une valeur approchée de 2 à 10^{-2} près.

Exercice 2. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
   (a) Etudier les variations de f.
   (b) Déterminer les points fixes de f.
   Dans la suite, on considère la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

   Les parties 2) et 3) sont indépendantes.
2. Dans cette partie on suppose que $u_0 = \frac{3}{2}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Etudier le sens de variations de (u_n).
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Dans cette question on choisit $u_0 = 3$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant 3$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - 1 \geqslant 2(u_n - 1)$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant 2^{n+1} + 1$.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (e) Déterminer un rang n_0 à partir duquel on est sur que $u_n \geqslant 10^3$.

Exercice 3. *A*) On pose, pour tout n entier supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall k > 1, \ \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n \leqslant \ln(n) + 1$.

B) On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. (a) Montrer par recurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
   (b) En déduire le sens de variations de la suite (u_n).
2. (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^2 \geqslant 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n^2 \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

   (b) En utilisant la partie A), établir que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

   (c) En déduire finalement que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

Fin de l'épreuve.