Devoir surveillé ECT.
Suites et probabilités.

Exercice 1. (7 points).
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^n - n.x + 1.$$

1. Montrer l'existence de deux réels a_n et b_n vérifiant : $0 < a_n < 1 < b_n$ et $f_n(a_n) = f_n(b_n) = 0$.
2. Etude de la suite (a_n).
   (a) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   (b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n.a_n = 1$.
3. Etude de la suite (b_n).
   (a) Soit a un réel positif, montrer que : $(1+a)^n \geqslant 1 + n.a + \frac{n.(n-1)}{2}.a^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$
   (b) En déduire que : $f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0$ et donner la limite de la suite (b_n).
   (c) On pose : $c_n = b_n - 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n.c_n}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 2. (7 points).
On considére un dé A dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et sept dés $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ et D_7 tels que pour chaque i, entre 1 et 6, le dé D_i possède $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires. On choisit tout d'abord un des septs dés D_i de la manière suivante : On lance le dé A ; si le résultat est $2, 3, 4, 5$ ou 6, on choisit le dé dont le numéro est sorti ; si le résultat du lancer est 1, on lance de nouveau le dé A, et si le nouveau résultat est $1, 2$ ou 3 on choisit le dé D_1, si le résultat est $4, 5$ ou 6 on choisit le dé D_7.
Quand on a choisit un dé D_i, on joue toujours avec celui-ci.

1. Calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au premier lancer du dé choisi.
2. Sachant qu'il est sorti une face noire au premier lancer, calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au deuxième lancer.
3. Montrer que les événements "avoir une face noire au premier lancer" et "avoir une face noire au deuxième lancer" ne sont pas indépendants.
4. Sachant qu'il est sorti une face noire aux deux premiers lancers, calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au troisième lancer.
5. Sachant qu'il est sorti une face noire aux n premiers lancers, calculer la probabilité conditionnelle $p(n)$ qu'il sorte une face noire au $(n+1)$ème lancer.
6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n)$ et interprèter le résultat.

Exercice 3. (6 points).
Un jeu consiste à déplacer un jeton autour des sommets d'un carré $AGBP$ (les sommets étant notés dans l'ordre trigonométrique) à l'aide d'un dé.
A chaque lancer du dé, le joueur déplace dans le sens trigonométrique le jeton du nombre de sommets égal au nombre donné par le dé ; le joueur joue jusqu'à ce que le jeton tombe sur G, il a alors gagné, ou que le jeton tombe sur P, il a alors perdu.
Un joueur J choisit de partir du sommet A et un joeur J' choisit de partir du sommet B.

Considérons les événements suivants :
V :" J gagne",
V' " J' gagne",
L " J perd"
et B_1"J va en B à l'issue du premier lancer de son dé".

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que : $P(V) = \frac{2}{5}\Big(1 + P_{B_1}(V)\Big)$.
2. Démontrer que : $P(V') = \frac{1}{5}\Big(1 + 2P(V)\Big)$.
3. En déduire $P(V)$ et $P(V')$.
4. Sans calcul, déterminer $P(L)$.

Fin de l'épreuve.