Devoir surveillé ECT*.
Suites et séries numériques.

Problème :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle, on note $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ définie par :

$$\forall n \geqslant \mathbb{N}: \ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose dans un premier temps que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite géométrique : $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) On suppose $q = 1$ Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
   (b) On suppose $q \neq 1$, Exprimer le terme général de $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) Discuter la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de q.

2. On s'intéresse ici à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général : $u_n = \frac{1}{n}$.
   (a) Etablir que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ ln(x+1) \leqslant x$$
   puis que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ ln(n+1) - ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n \geqslant ln(n+1).$$
   (c) Que dire de la série $\sum u_n$?
   (d) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}.$$
   (e) Retrouver la nature de la série $\sum u_n$.

3. On s'intèresse ici à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général : $u_n = \frac{1}{n^2}$.
   (a) Etablir que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \ \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée.
   (c) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ sans utiliser le résultat du cours concernant les séries de Riemann.

4. On s'interesse ici à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
   (a) Montrer que les deux suites $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

(b) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

5. On revient au cadre général : $(u_n)_{n \geqslant 1}$ suite réelle et $(S_n)_{n \geqslant 1}$ définie par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

(a) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

(b) Observer que la réciproque est fausse en vous appuyant sur l'un des exemples étudiés précédemment.