Exercices en ECG.
Couple de variables aléatoires discrètes.

Exercice 1. .
Soit $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$.
On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$:

$$P(X=i, Y=j) = \begin{cases} 0, & \text{Si } i < j\,; \\ \frac{e^{-b} b^i a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!}, & \text{Si } i \geqslant j. \end{cases}$$

Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur l'intervalle $[|1,N|]$.
Déterminer la loi de $Z = max(X,Y)$.

Exercice 3. Une urne contient initialement n jetons numérotés de 1 à n. A chaquee tirage d'un jeton de l'urne, avant de le remettre, on retire tous les jetons dont le numéro est strictement supérieur au numéro du jeton que l'on vient de sortir.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note X_k le numéro du jeton sorti lorsque du k-iéme tirage.

1. Cacluler $P(X_{k+1} = j | X_k = i)$ pour $i,j \in [|1,n|]$.
2. Calculer $E(X_{k+1} | X_k = i)$ pour tout $i \in [|1,n|]$.
3. Exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$. En déduire une expression de $E(X_k)$ en fonction de k.

Exercice 4. Une urne contient la meme quantité de boules rouges, de boules blanches et de boules vertes.
On tire avec remise N boules ou N est une variables aléatoire suivant la loi de poisson de paramétre $\lambda > 0$.
On note R le nombre de boules rouges, B le nombre de boules blanches.

1. Calculer : $P(R = i, B = j | N = n)$ pour tous entiers naturels i,j,n tels que : $i + j \leqslant n$.
2. Déterminer la loi du couple (R,B).
3. Les variables R et B sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[|1,3|]$ et Y suit la loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$..
Calculer l'espérance de $Z = X^Y$.

Exercice 6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramétre $p \in]0,1[$. On pose $T = max(X,Y)$ et $U = min(X,Y)$.

1. Montrer sans calcul que T et U admettent une espérance et que :
$$0 \leqslant E(T) \leqslant \frac{2}{p}, \quad 0 \leqslant E(U) \leqslant \frac{1}{p}.$$
2. Déterminer la loi de T.
3. Montrer que U la loi géométrique dont on précisera le paramétre.
4. Déterminer les espérances de T et U.
5. Déterminer la loi du couple (T,U).
6. les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramétres respectifs p et q. On pose : $Z = Y - X$ et $T = |Y - X|$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Calculer l'espérance et la variance de Z.
3. Calculer $P(Y > X)$ et $P(Y < X)$.
4. Déterminer la loi de T.
5. Calculer l'espérance de T.

Exercice 8. . Soit X, Y, Z trois variables aléatoires deux à deux indépendantes et de meme loi, admettant une variance. On pose $T = X + Y$ et $U = X + Z$. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du coupe (T,U).

Exercice 9. . On donne dans un espace probabilisé deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[|1, n+1|]$. On suppose qu'il existe k tel que :
$$\forall (i,j) \in [|1,n+1|]^2, p_{ij} = P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\begin{array}{c} n \\ i-1 \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} n \\ j-1 \end{array} \right).$$

1. Déterminer la valeur de k.
2. Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ? X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Reconnaitre la loi de $Z = X - 1$. Donner l'espérance et la variance de X.
4. On note $B \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient (i,j) est $b_{ij} = P_{(X=j)}(Y = i)$. Calculer b_{ij} et en déduire les dimensions de l'image et le noyau de B.
5. Calculer B^2, Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 10. . Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On ote f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a,b) = E((Y - aX - b)^2).$$

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Si la variance de X est non nulle, montrer que la fonction f admet un unique point critique que l'on précise en fonction de $E(X)$, $(E(Y)$, $V(X)$ et $cov(X,Y)$.