Exercices en ECG.

Thème : Développements limités, fonctions Ck et étude de fonctions.

Exercice 1. Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

$$a(x) = e^{-x}\frac{x}{1+x} \qquad b(x) = \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x} \qquad c(x) = \frac{e^{4x}-1}{x}$$
$$d(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \qquad e(x) = \frac{x\ln(1+x)-\exp(x^2)}{x^2} \qquad f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{1+x}}$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{xe^x-e^x+1} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right) \qquad \lim_{x\to 0}(1-\sqrt{1+x})^{1/x}$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)-e^x}{1-\exp(1/x)}$$

Exercice 3. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases}$

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$ et expliciter sa dérivée sur $\mathbb{R}^\times$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer $f'(x)$ lorsque $x\neq 0$
3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$. En déduire que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.

Exercice 5. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont C^1 sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de dérivabilité

$$I=\mathbb{R} \text{ et } a(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0\end{cases} \qquad I=\mathbb{R}_+ \text{ et } b(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0\end{cases}$$
$$I =]-\infty,1] \text{ et } c(x) = x\sqrt{1-x} \qquad I=[-1,1] \text{ et } d(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$$
$$I=\mathbb{R} \text{ et } e(x) = \ln(e^{2x}-2e^x+3) \qquad I=\mathbb{R} \text{ et } f(x) = x\sqrt[3]{x+x^2}$$
$$I=\mathbb{R}_+ \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}}{e^x-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases} \qquad I=\mathbb{R} \text{ et } h(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0\end{cases}$$

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est C^1 sur $]-1,+\infty[$ et expliciter sa dérivée.
2. Quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x=0$?
   Etudier l'existence de tangente horizontale.
3. Déterminer le signe de la fonction $x \mapsto -x+(1+x)\ln(x+1)$ sur $]-1,+\infty[$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]-1,+\infty[$. Quel est le signe de f sur $]-1,+\infty[$?
5. Etudier l'existence d'asymptotes de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en -1 et en $+\infty$.
6. Tracer la courbe représentative de f

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} x^{1+1/x} = \exp[(1+\dfrac{1}{x})\ln x] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Est-elle dérivable en 0 ?
2. Montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad \ln x \leqslant 1+x$. Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ et préciser son signe.
   Préciser le sens de variations de f.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Etudier la nature de la branche infinie de C en $+\infty$.
   (On donnera un équivalent simple de $f(x)-x$)
4. Soit C la courbe représentative de f. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 puis construire C et T dans un repère orthonormé (on admettra que T est en dessous de C au voisinage du point de contact)