Exercices en ECG.
Fonctions de plusieurs variables réelles.

Exercice 1. .
Représenter graphiquement les parties du plan définies par :

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 1, y \geqslant 0, y + x - 3 \geqslant 0\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0, y \geqslant 0, 3y + x - 12 \leqslant 0, 3x + y - 12 \leqslant 0\}$.

Exercice 2. Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

— $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

— $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes exprimer sous réserve d'existence sa dérivée partielle en tout point de Ω :

1. $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right), \quad \Omega =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
2. $f(x,y) = \sqrt{x.y}, \quad \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y - xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 4. Soit f la fonction définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer si elles existent les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4. la fonction g définie par :
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 5. Soit $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f. On admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur D.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in D$, on a :
$$2y.f(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $y \in]0,1[$ on a :

$$| \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \leqslant | \ln(y) | .$$

En déduire que pour $x \in \mathbb{R}^+$, la convergence de l'intégrale : $\int_0^1 f(x,y)\ dy$.

Exercice 6. . Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - y^3$, Déterminer les les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. . Soit $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{< x/a >}{\| x \|^2 + \| a \|^2}.$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ puis montrer qu'il existe une fonction λ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = \lambda(x)(a - 2f(x)x).$$
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Est-ce-que la fonction f admet un extremum en chacun de ses points critiques ?

Exercice 8. . Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+y)(x^2+y^2).$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier le signe de f.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. la fonction f admet-elle des extremums locaux ?

Exercice 9. Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + xy + y^4.$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des points critiques que l'on précisera.
3. Justifier que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad xy \geqslant -\frac{x^2+y^2}{2}.$$
En déduire que f est minorée par $-1/8$.
4. Etudier les extréma de f.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x,y) = (1+x^2)^y.$$

1. Justifier que f est de classe C^1 et calculer $\nabla f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Ecrire l'approximation affine de f au voisinage de $(1,1)$. Comparer $f(9/10, 11/10)$ à 2.