Exercices en ECG.
Intégrales généralisées.

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales impropres :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \quad J = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}, \quad K = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|t-1|}.(3-t)^2}.$$

Exercice 2. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(t).\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}dt \quad \int_0^{+\infty} e^{-(\ln(t))^2}dt \quad \int_0^{+\infty} \ln(t).e^{-t}dt.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}dt \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-1)}{(1+t)^2}dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt.$$

Exercice 3. Etudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} \quad \int_0^{+\infty} \Big(1 - t\arctan(\frac{1}{t})\Big)dt \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)dt.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t+1)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}dt \quad \int_1^2 \frac{dt}{t.(\ln(t))^\alpha}.$$

Exercice 4.

1. Justifier la convergence des intégrales :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\Big(\sin(t)\Big)dt \quad et \quad I = \int_0^{\pi/2} \ln\Big(\cos(t)\Big)dt.$$

   Et montrer que : $I = J$.

2. En considérant $I + J$, calculer I et J.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

1. Justifier l'existence des intégrales généralisées I_n, $n \geqslant 1$.
2. Pour $n \geqslant 1$, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire une expression de I_n à l'aide des factorielles.

Exercice 6. Soit $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt = 1$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in]1; +\infty[$ tel que : $x_0^2.f(x_0) = 1$.

Exercice 7. Montrer que l'application qui, à un polynome $P \in \mathbf{C}_0[X]$ associe le $(n+1)$-uplet de complexes $(z_0, z_1, ..., z_n)$ défini par :

$$\forall k \in [|0, n|], \quad z_k = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k P(t).$$

est un isomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$ sur $\mathbf{C}^{n+1}$.

Exercice 8. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(nt)}{(t^2+t+1)^n} dt.$$

Montrer que la suite (I_n) est bien définie et converge vers 0.

Exercice 9. Etablir la convergence et calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, t = \sin(u) \; et \; J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du, u = \tan(u).$$

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x) dx$.

1. Etablir que, pour tout naturel n non nul, I_n existe.
2. Etablir que, pour tout entier naturen non nul n :
$$I_n = \frac{\ln(n)}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx.$$
3. Etablir que, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{\ln(n)}{n} \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^3}.$$
4. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11. (Fonctions d'Euler de première et seconde espèce.)

1. Montrer l'existence pour $x > 0$ de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.
2. Prouver que : $\forall x > 0, \; \Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.
3. Préciser la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Prouver l'existence de $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{y-1} dt$ pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
5. Etablir que pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ une relation entre $\beta(x+1,y)$ et $\beta(x,y+1)$ puis entre $\beta(x+1,y)$ et $\beta(x,y)$.
6. Calculer $\beta(x,y)$ pour $(x,y) \in (N^*)^2$.

Exercice 12. (HEC.)
Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa monotonie.
2. Prouver que si $0 < x < y$ alors $0 < f(x) - f(y) < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.
   Etudier la continuité de f.
3. Calculer pour $x > 0$, $f(x+1) + f(x)$.
4. Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Etablir que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.