Exercices en ECG.
Raisonnement par récurrence.

Exercice 1. Pour tout entier naturel n non nul, soit la propriété $P(n)$ suivante :

$$1+2+3+...+n=\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2.$$

(a) Vérifier que cette proriété est héréditaire.

(b) Cette propriété est-elle vraie pour tout entier n ?

(c) Existe-t-il es valeurs de n pour lesquellles cette propriété est vraie ?

Exercice 2. On considère la suite définie par :

$$u_0=2 \quad et \quad u_n=\frac{1}{5}u_{n-1}+\frac{1}{2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Montrer que :

$$u_n=\frac{11}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{5}{8} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0=0, et\ u_n=-\frac{1}{3}w_{n-1}+4 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Montrer par récurrence que :

$$2\leqslant u_n\leqslant 5,\ \forall n\geqslant 0.$$

Exercice 4. Montrer par récurrence que pour tout $n\geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 5. Soit la suite u définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$. Démontrer que la suite u est minorée par 1 et est décroissante.

Exercice 6. Soit la suite u définie par $u_0=3$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1}=\frac{4u_n-2}{u_n+1}.$$

(a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{4x-2}{x+1}.$$

(b) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n>2$.

(c) La suite u est-elle monotone ?

Exercice 7. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_2=3, et\ \forall n\geqslant 2: \quad u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{u_n+3}.$$

Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $u_n=\frac{2^n+2}{2^n-2}$.

Exercice 8. Soit la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = \frac{7}{8}, et\ \forall n \in \mathbb{N} :\ v_{n+1} = v_n^2.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} :\quad v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}.$$

Exercice 9. Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0,\ et\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant n.$

Exercice 10. Soit la suite définie par :

$$u_0 = \frac{2}{3},\ et\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < u_n < 1.$
Ind : On pourra étudier : $f(x) = x(2-x)$ sur $[0;1]$.

Exercice 11. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 12. Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, et\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < u_n < 2.$

(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 13. Soit la suite définie par :

$$u_0 = 2, et\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2.$