Exercices en ECG.
Réduction des endomorphismes et des matrices.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il deux matrices A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB - BA = I_n$.

Exercice 2. Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, et ϕ l'application :
$\phi : E \to E, M \mapsto M - Tr(M).I_n$.

1. a) Vérifier que ϕ est endomorphisme de E.
   b) Déterminer $Ker(\phi)$.
   c) ϕ est-il un automorphisme ?
2. a) Déterminer l'ensemble E_1 des matrices M telles que : $\phi(M) = M$.
   Jusitifier qu'il s'agit d'une sous-espace vectoriel de E, préciser sa dimension.
   b) Déterminer l'ensemble E_2 des matrices M telles que : $\phi(M) = (1 - n).M$.
   Jusitifier qu'il s'agit d'une sous-espace vectoriel de E, préciser sa dimension.
3. a) Justifier que E_1 et E_2 sont stables par ϕ et supplémentaires.
   b) Donner la matrice représentant ϕ dans une base obtenue en concaténant une base de E_1 et une base de E_2.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$, f l'endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base canonique de E. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est diagonalisable, en précisant une base de chacun de ses sous-espaces propres.
$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et en déduire un polynome annulateur de M.
2. Déterminer les valeurs propres de M.
3. Montrer que M est diagonalisable.
4. Donner une matrice P inversible telle que : $P^{-1}MP$ soit diagonale.
5. Que vaut M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$? et si $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$?

Exercice 5. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 en fonction de M et I_3. En déduire un polynome annulateur de M.
2. Déterminer les valeurs propres de M.
3. Etudier si M est diagonalisable.

Exercice 6. . Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Etudier si M est diagonalisable.

3. Le polynome $\prod_{\lambda \in Sp(M)} \Big(X - \lambda\Big)$ est-il annulateur de M ?
4. Vérifier que $P = X(X-1)^2$ est annulateur de M.
5. pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste $\mathbb{R}_n$ de la division euclidienne de X^n par P.
6. En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de M dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbf{C}$.
2. M est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? et dans $\mathbf{C}$?
3. Soit $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Montrer que P est annulateur de M.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ déterminer le reste de la division de X^n par $P(X)$.
5. En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. . Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = n$ pour $n \in [|0;2|]$ et $u_{n+3} = 2.u_{n+2} + u_{n+1} - 2.u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une matrice M telle que pour $n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = M.U_n$.
2. Montrer que M est diagonalisable et qu'il existe trois matrices A, B et C telles que pour tout $n \in \mathbb{N} : M^n = A + 2^n.B + (-1)^n.C$.
3. En déduire l'existence de trois réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = a + b.2^n + c.(-1)^n$. Expliciter u_n en fonction de n.

Exercice 9. Soit E de dimension finie n et u un endomorphisme non nul de E. Soit k un entier naturel. On suppose que u est nilpotent d'ordre k, c'est à dire que :

$$u^k = 0 \quad et \quad u^{k-1} \neq 0.$$

1. a) Montrer que 0 est l'unique valeur propre de u.
   b) u est-il diagonalisable ?
2. a) Soit v un vecteur de E tel que : $u^{k-1}(v) \neq 0$.
   Montrer que la famille $L = (v, u(v), u^2(v), ..., u^{k-1}(v))$ est libre.
   b) En déduire que : $k \leqslant n$.
   c) on suppose que $k = n$. Donner la matrice représentative de u dans L.

Exercice 10. .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynome $P = (X-1)^2.(X-2)$ est un polynome annulateur de A.
2. En déduire l'expression de A^n, pour tout n entier naturel.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$P(X) \mapsto P(a.X + b).$$

1. Déterminer le spectre de u.
2. Justifier que si $a \notin \{-1, 1\}$, l'endomorphisme u est diagonalisable.
3. On suppose que $a = 1$. Pour quelles valeurs de b, l'endomorphisme u est diagonalisable ?

4. On suppose que $a = -1$. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 12. Soit u un endomorphisme de $E = M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in E, \quad u(M) = M^t.$$

1. Donner un polynome annulateur non nul de M.
2. Déterminer le spectre de u.
3. Est-ce-que u est diagonalisable ?

Exercice 13. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad u(P) = (X^2+1)P'' + 2XP'.$$

1. Déterminer les éléments propres de u lorsque $n = 3$.
2. Déterminer le spectre de u. Est ce que u est diagonaliable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14. On note Tr la forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ qui à toute matrice associe sa trace. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle.
Soit Φ l'application qui à toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ associe :

$$\Phi(M) = Tr(A).M - A.Tr(M).$$

1. Montrer que : Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que : $T = \{M \in M_n(\mathbb{R})/Tr(M) = 0\}$ et $W = Vect(A)$ sont des sous-espaces propres de Φ.
3. En déduire que Φ est diagonalisable.

Exercice 15. . Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = 3.u_{n-1} + 2.v_{n-1}, \quad v_n = u_{n-1} + 2.v_{n-1} \quad et \quad u_0 = 1 \quad v_0 = 1.$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 16. . On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) de nombres réels définies par la donnée de trois réels x_0 , y_0 et z_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 4y_{n-1} + 2z_{n-1}, & ; \\ y_n = -3y_{n-1} - 2z_{n-1}, & ; \\ z_n = 4y_{n-1} + 3z_{n-1}, & . \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Déterminer les epxressions de x_n ,y_n et z_n en fonction de n et x_0, y_0 et z_0.

Exercice 17. Soit n un entier naturel non nul et E un **C**-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que la trace d'un endomorphisme f est indépendante de la matrice qui le représente dans une base choisie. On note ainsi $tr(f)$ la trace de f.

2. Montrer que, soit $E = Im(u) \oplus Ker(u)$, soit $Im(u) \subset Ker(u)$. On pourra discuter suivant la dimension de $Im(u) \cap Ker(u)$.
3. Soit e un vecteur non nul de $Im(u)$.
   (a) Montrer qu'il existe des vecteurs $(e_2, ..., e_n)$ de E tels que $B = (e, e_2, ..., e_n)$ soit une base de E.
   (b) on suppose que $Im(u) \subset Ker(u)$. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ? calculer alors $Tr(u)$.
4. Montrer que les assertions suivantes sont éuivalentes :
   (a) u est diagonalisable.
   (b) $E = Im(u) \oplus Ker(u)$.
   (c) $Tr(u) \neq 0$.
5. Soient A et J deux matrices non nulles de $M_n(\mathbf{C})$. On considère l'aplication Ψ_A définie par, pour tout $X \in M_n(\mathbf{C})$:
$$\Psi_A(X) = Tr(A.X).$$
   On remarquera que Ψ_A est un endomorhisme de $M_n(\mathbf{C})$.
   (a) Décrire le noyau de Ψ_A. Quelle est l'image de Ψ_A ? Quel est le rang de Ψ_A ?
   (b) Exprimer la trace de l'endomorphisme Ψ_A en fonction de A et J.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que Ψ_A soit diagonalisable.