Exercices en ECG.
Variables aléatoires discrètes.

1 Exercices classiques :

Exercice 1. Une urne est composée de n boules numéritées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise dans cette urne. On note $b_1, b_2, ..., b_k, ...$ les numéros des boules obtenus. On s'arrête dès que $b_k \geqslant b_{k-1}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X en en déduire sa loi.
3. Calculer l'espérance de X. Puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$.

Exercice 2. Un joueur décide de jouer à "Pile ou Face" avec une pièce qui donne "Pile" avec la probabilié $p \in]0,1[$ en procédant de la manière suivante :

- Pour le premier lancer, il parie 1 euro.
  - S'il gagne : le jeu s'arrête et la banque lui verse 2 euros.
  - Sinon, il parie 2 euros supplémentaires et procède au deuxième lancer.
    - S'il gagne : le jeu s'arrête et la banque lui verse 4 euros.
    - Sinon, il parie 4 euros supplémentaires et procède au troisième lancer.
      etc ...
      Quelle l'espérance de gain du joueur ?

Exercice 3. Un perchiste participe à une compétition. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées $1, 2, ..., n, ...$ et on fait les hypothèses :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que le sauteur passe la hauteur n est $\frac{1}{n}$.

Les différents sauts sont indépendants.

Soit X le numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P([X = n])$. Vérifier que X est bien une variable aléatoire.
2. Calculer, si elle existe, l'espérance de $X + 1$.(On utilisera le théorème de Transfert.)
3. Démontrez de même l'existence de $V(X)$ et calculer sa valeur. (On pourra étudier l'espérance de $X^2 - 1$.)

Exercice 4. Une urne contient n boules noires et $3n$ boules blanches. On tire successivement et avec remise des boules. Le jeu s'arrête lorsque :

On tire une boule noire, ou bien.

On a tiré successivement 3 boules blanches.

On note T la durée de la partie exprimée en nombre de tirages.

1. Déterminer $T(\Omega)$. Quelle est la loi de T ? son espérance ?
2. On suppose à présent que les tirages se font sans remise. Quelle est alors la loi de T ? son espérance ?

Calculez la limite quand n tend vers $+\infty$ de $E(X)$. Que constatez-vous ?

2 Pour aller plus loin

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrez que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} P([X=k]) = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} P([X>k])\Big) - nP([X>n]).$$

2. (a) On suppose que X admet une espérance, démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n.P([X>n]) = 0$. En déduire que la série de terme général $P([X>n])$ est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P([X>n]) = E(X).$$

   (b) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $P([X>n])$ est convergente. Montrer que X admet une espérance donnée et que :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X>n]).$$

Exercice 6. Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches laitières, on fait une analyse de lait. On peut procéder de deux manières différentes.

— 1ére Méthode : On effectue une analyse sur un échantillons de lait de chaque vache.

— On effectue une analyse sur un échantillon du mélange des laits des n vaches et si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache.
Soit X_n le nombre d'analyse réalisées dans la deuxième méthode. On pose : $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n puis l'espérance de Y_n en fonction de n.
2. On voulait connaitre la méthode la plus économique en fonction du nombre d'animaux.
   (a) Etudier la fonction $f : x \mapsto a.x + ln(x)$ ou $a < 0$.
   Montrer que f admet un maximum positif lorsque l'on choisit $a = ln(0.85)$.
   (b) Trouver dans ce cas la plus grande valeur entière de x pour laquelle $f(x) > 0$.
   (c) Déterminer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$.
   En déduire suivant les valeurs de n la méthode que l'on a intéret à adopter.

Exercice 7. On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée.
A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{2}{3}$ tandis que celle de faire face est égale à $\frac{1}{3}$.
Les lances sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, de deux piles consécutifs.
Soit n un entier naturel non nul. On pose p_n la probabilité de l'événement $[X = n]$.

1. Expliciter les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$ et $[X = 5]$.
   Déterminer les valeurs de p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad p_n = \frac{2}{9}.p_{n-2} + \frac{1}{3}.p_{n-1}.$$

3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.

Exercice 8. Un dé équilibré à 6 faces : deux numérotées zéro et quatre numérotées un. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir 2 zéros consécutifs pour la première fois.
On note $p_n = P([X = n])$.

1. Calculer p_0, p_1, p_2. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad p_n = \frac{2}{27}\big(1 - \sum_{j=0}^{n-3} p_j\big).$$

2. (a) Déterminer une relation liant p_n, p_{n-1} et p_{n-3} $(n \geqslant 4)$.
En déduire une relation matricielle entre :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ p_{n-2} \end{pmatrix}, \quad et \quad \begin{pmatrix} p_4 \\ p_3 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

   (b) En déduire p_n en fonction de n.