Exercices en ECT.
Calcul intégral.

Exercice 1. Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$I_1 = \int_{-1}^{1}(t+1)(t+2)^2dt,\quad I_2 = \int_0^4 \sqrt{x}\,(x-2\sqrt{x})\,dx,\quad I_3 = \int_1^2 3^u du,\quad I_4 = \int_1^4 \frac{1}{y\sqrt{y}}dy,$

$I_5 = \int_0^1 (2z-1)\exp(z^2-z)dz,\quad I_6 = \int_1^2 \frac{a^2}{\sqrt{1+a^3}}da,\quad I_7 = \int_1^2 \frac{2\sqrt{c}}{2+3c^{3/2}}dc,$

$I_8 = \int_1^e \frac{(\ln b)^5}{b}db,\quad I_9 = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2}dt,\quad I_{10} = \int_e^{e^3} \frac{\ln(3\gamma)}{\gamma}d\gamma,\quad I_{11} = \int_0^2 \beta^4\exp(-\beta^5)d\beta,$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$A = \int_{-1}^{1} xe^{3x}dx,\quad B = \int_0^1 (t^2+t)e^{2t}dt,\quad C_n = \int_1^e u^n\ln(u)du,\quad D = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln(v)}{v}dv,$

$E = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\,ds,\quad F = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)^3}dt,\quad G = \int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln(x)dx,\quad H = \int_0^1 y^4e^y dy,$

$I = \int_1^e z^2(\ln z)^3dz,\quad J = \int_0^1 (3x+1)^3\ln(3x+1)dx,\quad K = \int_1^e \ln y\,dy,$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_a^{1/a} \frac{\ln x}{x}dx$

a) par intégration par partie b) en posant le changement de variable $x = 1/t$

Exercice 4. Etudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^\times$).

$a_n = \int_0^n \exp(-t^2)dt,\quad b_n = \int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx,\quad c_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3}dx\quad d_n = \int_1^n (1-x)^3e^x dx,$

$e_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx,\quad f_n = \int_1^2 (\ln t)^n dt,\quad g_n = \int_0^1 x\exp(-n^2x)dx,\quad h_n = \int_{-1}^0 x\exp(n^2x)dx,$

$i_n = \int_1^{1/n} (\ln y)^3dy,\quad j_n = \int_1^2 \frac{u^{1/n}}{1+u}du,\quad k_n = \int_0^1 \frac{u}{1+u^n}du,\quad l_n = \int_1^{\ln n} \frac{t}{1-\exp(t)}dt$

Exercice 5. On pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$. Vérifier : $\forall x \in [0,+\infty[,\quad 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 6. On pose $I_n = \int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[,\quad \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x-1}$.

En déduire que $\forall n \geqslant 2$, $\ln n - \ln 2 \leqslant I_n \leqslant \ln(n-1)$. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

Exercice 7. Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx$.

Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$ et donner encadrement simple de I_n.
En déduire que la suite $(I_n)_n$ est convergente. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
(*Etudier la fonction* $x \mapsto x - x^2$ *sur* $[0,1]$). Donner alors la limite de la suite $(I_n)_n$.

Exercice 8. On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \dfrac{x dx}{1+x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$
En remarquant que $x/(1+x) = 1 - 1/(1+x)$, calculer I_1. Que vaut I_2 ?
Quel est le signe de I_n ? Donner un encadrement de la suite (I_n).
Quelle est la monotonie de la suite (I_n) ? La suite (I_n) est-elle convergente ?
Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x(1-x^n)dx \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x dx$. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.