Exercices en ECT.
Chaînes de Markov.

Exercice 1. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires. L'urne U_1 contient 13 boules blanches et 5 boules noires, l'urne U_2 contient 10 boules blanches et 12 boules noires. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine.
Si l'on obtient une boule blanche (resp. noire), le $2^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
Au $i^{ème}$ tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2). Soit B_i l'évènement : "on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage".

1. Calculer $P(B_1)$ et $P(B_2)$.
2. Exprimer $P(B_n)$ en fonction de $P(B_{n-1})$.
3. Montrer que la suite $P(B_n)$ converge et déterminer sa limite. Interprétation.

Exercice 2. Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante : si la place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.
2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k et calculer $\lim_{n\to+\infty} r_n = r$.

Exercice 3. Deux pièces A et B sont reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue vers l'extérieur. Une guêpe initialement dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. Son trajet obéit aux règles suivantes :

— Lorsqu'elle est en A au temps $t = n$, alors, au temps $t = n+1$, elle reste en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, ou elle passe en B avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$

— Lorsqu'elle est en B au temps $t = n$, alors, au temps $t = n+1$, elle retourne en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$, ou elle reste en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ou elle sort à l'air libre avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Au temps $t = 0$, la guêpe est en A. **Lorsqu'elle est sortie, elle ne revient plus.**
On note A_n (resp. B_n, resp. S_n) les événements : A_n "à l'instant $t = n$, elle est en A "
B_n : à l'instant $t = n$, elle est en B " S_n : " à l'instant $t = n$, elle sort "
et a_n, b_n, s_n leurs probabilités respectives.

1. Calculer a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1.
2.
   (a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   (b) Vérifier que la suite u définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ est constante.

Prépas Maths 360.

(c) Montrer que la suite v définie par $\forall n \geqslant 0, \quad v_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ est géométrique de raison $\frac{5}{6}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

(d) Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n

3. Justifier que $\forall n \geqslant 2$, $s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}$. En déduire s_n en fonction de n.

Exercice 4. Soit a un réel appartenant à $]0, \frac{1}{2}[$.
Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable ou baisser.
Dans un modèle mathématique, on considère que :

— le premier jour le titre est stable.
— si un jour n le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1-2a$, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité a.
— si un jour n le titre est stable, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité $1-2a$ et baissera avec la probabilité a.
— si un jour n le titre baisse, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité $1-2a$.

On note M_n (resp. S_n, resp. B_n) l'événement " le titre donné monte (resp. reste stable, resp. baisse) le jour n ".

1. On pose $p_n = P(M_n)$, $q_n = P(S_n)$ et $r_n = P(B_n)$.
   (a) Expliciter p_{n+1} (resp. q_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n.
   (b) Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire l'expression de r_n en fonction de p_n et q_n.
2. Montrer que les suites p et q sont arithmético-géométrique.
3. En déduire p_n, q_n puis r_n en fonction de n.
   Donner la limite de ces trois suites et interpréter le résultat.

Exercice 5. Une boite A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boite B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boite et on les échange. On recommence cette opération n fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$. Pour cela, on introduit les évènements :
P_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 0 "
Q_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 1 "
R_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 2 "

On pose également $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

1. Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1.
2. Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$.
4. En déduire l'expression de q_n en fonction de n puis celle de p_n et de q_n.
5. Déterminer les limites des trois suites. Interprétation.

Prépas Maths 360.