Exercices en ECT.
Convergence des suites.

Exercice 1. Etudier la monotonie des suites suivantes
$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad b_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{n}, \quad c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - n \ln n.$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et u la suite définie par $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \frac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \ \frac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
2. En déduire la convergence des suites $(\ln u_n)_n$ et (u_n).

Exercice 3. On considère la suite u définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$ et $u_0 = 2$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$. Etudier la monotonie de la suite u.
2. Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 4. On considère la suite u définie par : $\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $u_2 = 1$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$ puis donner la monotonie de la suite u.
2. En déduire que la suite u est convergente.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{n}{2(n-1)}$ et en déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 5. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $0 < u_n \leqslant 2$. Quelles sont les limites éventuelles de u ?
2. Montrer que $\forall x \in [0, 2] \quad \sqrt{x+2} \geqslant x$. En déduire la monotonie de la suite u.
3. Justifier la convergence de la suite u et déterminer sa limite.

Exercice 6. Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1 + 5u_n}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $\forall \ n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$. En déduire la monotonie de u
2. La suite est-elle convergente ? Calculer sa limite.
3. Montrer que $\forall \ n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant \frac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 7. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$ et $u_0 = 3$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$ puis déterminer la monotonie de la suite u.
2. Justifier la convergence de la suite u et expliciter sa limite.

Exercice 8. On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$ et $u_0 = 1$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant \dfrac{1}{3}$ puis que $\forall x \in [1/3, +\infty[, \quad \dfrac{2x}{3x+1} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{6}$
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{6}$. En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3 \times 2^{n-1}}$
3. Déduire des questions précédentes que la suite u converge et donner sa limite.

Exercice 9. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \geqslant 0$ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $0 < u_n < v_n$ puis donner la monotonie des suites u et v
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2}$ puis $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \dfrac{v_0 - u_0}{2^n}$.
   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$.
3. Déduire des questions précédentes que les deux suites sont convergentes.
4. Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante.
   En déduire la limite commune des suites u et v.

Exercice 10. Soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_n > 0$ et donner la monotonie de la suite u.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$ et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11. On définit deux suites a et b par $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.
Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Conclusion.