Exercices en ECT.
Matrices inversibles et systèmes linéaires.

Exercice 1. On considère les matrices suivantes A. Vérifier que l'on a bien l'égalité demandée et en déduire, si cela est possible, l'inversibilité de A. Donner alors son inverse.

a) $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$ $\quad A^2=9I$ $\quad$ b) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&6\\3&-3&4\end{pmatrix}$ $\quad A^2+A-2I=0$

c) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ $\quad A^3-A^2-2A+4I=0$ $\quad$ d) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$ $\quad A^2-2A=0$

Exercice 2. On considère la matrice $J=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\-2&1&2&-1\\2&-1&-1&0\\3&-2&-2&0\end{pmatrix}$

1. Calculer J^2, J^3 et J^4. Que peut-on en déduire de J^k pour $k\geqslant 4$?
2. Développer algébriquement l'expression $(I+J)(I-J+J^2-J^3)$.
3. En déduire que la matrice $(I+J)$ est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 3. Pour tout réel a, on définit la matrice $N(a)$ par $N(a)=\begin{pmatrix}a+1&-a&-a\\a&-a+1&-a\\0&0&1\end{pmatrix}$

1. Soient a et b deux réels. Déterminer le réel c tel que $N(a)N(b)=N(c)$.
2. A quelle condition sur c a-t-on $N(c)=I_3$?
3. En déduire les conditions sur a pour que $N(a)$ soit inversible et expliciter le cas échéant $[N(a)]^{-1}$

Exercice 4. Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3=0_3$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t)=I+tA+\dfrac{t^2}{2}A^2$

1. Montrer que : $\forall (t,t')\in\mathbb{R}^2,\quad E(t)\,E(t')=E(t+t')$
2. Calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
3. Exprimer $E(2t)$, $E(3t)$, $E(4t)$, $E(5t)$ en fonction de $E(t)$. Quelle formule peut-on conjecturer ? Démontrer cette formule.
   En déduire l'expression de $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Exercice 5. Les systèmes suivant ont-ils des solutions. Si oui, expliciter les.

1) $\left\{\begin{array}{c}2x+y+z=-5\\2x+13y-7z=-1\\x-y+z=1\end{array}\right.$ $\quad$ 2) $\left\{\begin{array}{c}3x+2y+2z=1\\4x-y+3z=-1\\2x+5y+z=1\end{array}\right.$ $\quad$ 3) $\left\{\begin{array}{c}2x+y=2\\x+2y=1\\x+y=1\end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{c}x+3y-z+t=1\\2x+13y-7z+2t=2\\x-y+z+t=0\\x+7y-4z+t=-1\end{array}\right.$ $\quad$ 5) $\left\{\begin{array}{c}y+z+t=-1\\x+z+t=0\\x+y+t=1\\x+y+z=2\end{array}\right.$ $\quad$ 6) $\left\{\begin{array}{c}2x+y+z+t=-5\\2x+3y-3z+t=-1\\x-y+z-t=1\end{array}\right.$

Prépas Maths 360.

7) $\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=12 \\ u+3v=0 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y-t=1 \\ -x+y+z=0 \\ -y+z+t=0 \\ x-z+t=1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x+y+z-3t=1 \\ -3x+y+z+t=-1 \\ x-3y+z+t=-1 \\ x+y-3z+t=1 \end{cases}$

Exercice 6. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Résoudre par rapport à x, y, z le système (S) : $\begin{cases} x-y+z=a \\ x+2y+z=b \\ x+y+2z=c \end{cases}$

En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 8. Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse, par la méthode des opérations élémentaires sur les matrices puis par les systèmes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Résoudre les systèmes suivants en X

1. Soit $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, i.e. $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 3X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$)

   puis $AX = -3X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{R}\}$)

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = -2X$ (($S = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2c \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$)

   puis $AX = X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{R}\}$)

2. Soit $X \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, i.e. $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 3X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \\ d \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$)

   puis $AX = -X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} -b-c-d \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, b, c, d \in \mathbb{R}\}$)

Prépas Maths 360

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 0_{4,1}$ ($S = \{ \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}$)

puis $AX = X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \\ d \end{pmatrix}, d \in \mathbb{R}\}$)

Exercice 10. Pour chaque matrice A des questions 1 et 2 de l'exercice 9, déterminer tous les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
Par exemple, pour la question 1.a), pour quelles valeurs de λ la matrice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

Prépas Maths 360