Exercices en ECT.
Probabilités conditionnelles.

Exercice 1. Une étude statistique sur le sexe des bébés a montré que sur 100 naissances, 52 bébés sont des garçons et 48 sont des filles. On suppose que les évènements "accoucher d'un garçon" et "accoucher d'une fille" sont indépendants. Virginie a eu 4 bébés.

1. Calculer la probabilité que Virginie ait
   (a) autant de garçons que de filles
   (b) un seul garçon.
   (c) un seul garçon sachant que son premier bébé est une fille.
   (d) un seul garçon sachant que son premier bébé est un garçon
   (e) un seul garçon sachant que son deuxième bébé est une fille.
2. On suppose que Virginie a eu 2 garçons et 2 filles et que son premier bébé est une fille. Calculer la probabilité pour que
   (a) le deuxième bébé soit une fille
   (b) le dernier bébé soit une fille.
   (c) le dernier bébé soit un garçon

   Le fait que premier bébé de Virginie soit une fille est-il indépendant du fait que Virginie ait exactement 2 garçons ?

Exercice 2. Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche 4 boules. On pose E : "obtenir 2 blanches " et F : "obtenir 2 rouges"

1. On suppose qu'il n'y a pas remise.
   Calculer les probabilités suivantes : $P(E \cap F)$, $P_F(E)$, $P_E(F)$.
   Les évènements E et F sont-ils indépendants ?
2. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise

Exercice 3. Une urne contient 20 boules dont 8 boules noires, 7 boules rouges et 5 boules blanches. On pioche sans remise 4 boules.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A "obtenir exactement deux boules blanches "
   (b) B "obtenir au moins une boule blanche "
   (c) C "obtenir autant de boules blanches que de boules rouges"
   (d) D "obtenir aucune boule noire "
2. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes
   $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_A(C)$, $P_C(A)$, $P_A(D)$, $P_D(A)$,
   $P_B(C)$, $P_C(B)$, $P_B(D)$, $P_D(B)$, $P_D(C)$, $P_C(D)$
3. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise.

Exercice 4. On dispose d'une urne contenant 20 boules dont 8 noires, 7 rouges et 5 blanches. On pioche, au hasard et sans remise, cinq boules. Calculer la probabilité de piocher

1. que des boules d'une même couleur.
2. que des boules blanches sachant que toutes les boules sont d'une même couleur
3. deux boules d'une couleur et trois boules d'une autre couleur
4. trois boules blanches sachant que l'on obtient les trois couleurs

Refaire l'exercice lorsqu'il y a remise

Exercice 5. On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0;1[$). "pile" (resp. "face") sera noté P (resp. F). Soit A_n l'évènement "la séquence PF apparait pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n".
Calculer $P(A_n)$ lorsque (a) $n = 3$ (b) $n = 4$ (c) $n = 5$ (d) n quelconque.

Exercice 6. Un archer tire sur une cible située à 20 m et une cible située à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (resp. q) avec $q < p$. On suppose que les tirs indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement.
Calculer la probabilité de gagner en commencer par la cible située à 20 m (resp. située à 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Exercice 7. On lance n fois consécutives une pièce. La probabilté d'obtenir "face" est p.
Calculer la probabilité qu'au cours des n lancers "face" ne soit jamais suivi de "face" lorsque a) $n = 3$ b) $n = 4$, c) $n = 5$ d) $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

Exercice 8. On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face. On effectue 5 lancers. Calculer la probabilité des évènements suivants
A "on obtient 2 piles" B "on obtient 3 piles" C "face n'est jamais suivi de face"