Exercices en ECT.
Puissances de matrices.

Exercice 1. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 6^{n-1}J$ où $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que
$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 4. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a^nP + b^nQ$

Exercice 5. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, D = \mathrm{diag}(4,6,8)$$

1. Vérifier que $A = P\,\mathrm{diag}(4,6,8)Q$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P\,\mathrm{diag}(4^n, 6^n, 8^n)Q$ puis expliciter A^n.

Exercice 6. On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}10&-6&-3\\-4&12&2\\-4&-4&6\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&8&0\\0&0&16\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&1&0\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-1&-1&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Vérifier que $A=PDQ$ puis montrer que $A^n=PD^nQ$ et donner les 9 coefficients de A^n

Exercice 7. Soient les matrices

$$A=\begin{pmatrix}7&8&8\\3&2&6\\-7&-7&-11\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}0&8&8\\-1&-8&0\\1&0&-4\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}8&8&16\\-1&-2&-2\\2&2&2\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ, QP et vérifier que $A=\frac{1}{8}PTQ$
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=8^{n-1}PT^nQ$ et donner tous les coefficients de A^n.

Exercice 8. On donne la matrice suivante : $A=\begin{pmatrix}1&-3&6\\6&-8&12\\3&-3&4\end{pmatrix}$

1. CalculerA^2 et déterminer deux réels a et b tels que $A^2=aA+bI_3$.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n=\left(\frac{1}{3}-a_n\right)A+\left(\frac{2}{3}+a_n\right)I_3$
3. Vérifier que la suite a est géométrique.
4. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 9. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2. Expliciter α et β tel que $A^2=\alpha A+\beta I$
2. Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels $A^n=a_nA+b_nI$
3. Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Que vaut a_0, b_0, a_1 et b_1 ?
4. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de b_n et déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Exercice 10. On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix}-2&1&1\\6&-2&-4\\-4&1&3\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3=6A-A^2$
2. Prouver que $\forall n\in\mathbb{N}^\times$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n=a_nA^2+b_nA$
   Donner a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3.
3. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de b_n et déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Exercice 11. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = B + 2I$

1. Calculer B^2 puis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 2^n I + n2^{n-1}B$.
2. Retrouver la formule précédente à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 12. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI + B$. Calculer B^2 et B^3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a^n I + na^{n-1}B + \dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}B^2$
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver la valeur de A^n.

Exercice 13. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont deux réels.

1. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$
2. Calculer BC et CB et vérifier que $B^2 = B, \quad C^2 = C$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = B + (1-p-q)^n C$.
4. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver la valeur de A^n.

Exercice 14. On considère trois suites a, b et c définies par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 5b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 7b_n - 4c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 5b_n + 5c_n \end{cases}$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ ainsi que les matrices

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(2, 3, 12)$$

1. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$
2. Vérifier que $A = PDQ$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nQ$
3. En déduire les coefficients de A^n puis l'expression des suites a, b et c en fonction de n et des conditions initiales a_0, b_0, c_0.

Exercice 15. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \operatorname{diag}(-1, 3, 1)$$

1. Vérifier que $A = \dfrac{1}{2}PDQ$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \dfrac{1}{2}PD^nQ$ et expliciter A^n.

2. On considère trois suites a, b et c telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = -2 \end{array} \right.$$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

(b) En déduire l'expression des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ en fonction de n.