Belle fiche d'exercices ECT.
Séries numériques.

Exercice 1. Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{5^n},\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n},\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+5n}{5^n},\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n},$$
$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n},\quad f)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}\quad g)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$
$$h)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n!},\quad i)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n2^n}{n!},\quad j)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$$

Exercice 2. Convergence d'une série par théorème de monotonie sur les sommes partielles.

1. On considère la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{e^n+e^{-n}}$.
   On note S_N la N^{e} somme partielle de cette série.
   (a) Déterminer la monotonie de la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$.
   (b) Justifier que $\forall n\geqslant 0,\quad \dfrac{1}{e^n+e^{-n}}\leqslant e^{-n}$.
   (c) En déduire que $\forall N\geqslant 0,\quad S_N\leqslant \dfrac{1-e^{-(N+1)}}{1-e^{-1}}$.
   (d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{e^n+e^{-n}}$ converge et que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{e^n+e^{-n}}\leqslant\frac{e}{e-1}.$$
2. On considère la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   On note T_N la N^{e} somme partielle de cette série.
   (a) En admettant que
   $$\forall n\geqslant 1,\quad 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right),$$
   montrer que
   $$\forall N\geqslant 1,\quad 2\left(\sqrt{N+1}-1\right)\leqslant T_N\leqslant 2\sqrt{N}.$$
   (b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3. Convergence d'une série par calcul explicite des sommes partielles.

1. On considère la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
   (a) Donner la définition de sa N^{e} somme partielle S_N.
   (b) Vérifier que $\forall N \in \mathbb{N}^{\times}, \quad S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$.
   (c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$
2. Mêmes questions avec la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}$
   Indication : *On vérifiera que*
$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
   puis que
$$S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$$

Exercice 4. Convergence d'une série par théorème de monotonie sur les sommes partielles.

1. On considère la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
   On note T_N la N^{e} somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
   (a) Vérifier que $\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
   (b) En déduire que $\forall N \geqslant 2, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant T_N \leqslant 2 - \frac{1}{N}$.
   (c) A l'aide de la question 1.b), montrer que la suite (T_N) est majorée.
   (d) Déterminer la monotonie de la suite $(T_N)_{N\geqslant 2}$.
   (e) En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$
   (f) En utilisant la question 1.b), vérifier que l'encadrement suivant
$$\frac{3}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2.$$
2. On considère la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.
   On note U_N la N^{e} somme partielle de cette série et on pose
$$V_N = U_N - \ln(N+1)$$
   (a) En admettant que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) - \ln x \leqslant \frac{1}{x},$$
   déterminer la monotonie de la suite $(V_N)_{N\geqslant 1}$.
   (b) Que vaut V_1 ? En déduire $\forall N \geqslant 1, \quad U_N \geqslant \ln(N+1)$.

(c) Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} U_N$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est-elle convergente ?

Exercice 5. Convergence et calcul de la somme d'une série à l'aide du calcul intégral.

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ ainsi que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t}dt$.

On note S_N la N^{e} somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.
3. Montrer que $\forall N \geqslant 0, \quad S_N = I_0 - (-1)^{N+1} I_{N+1}$.
4. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.$$