Exercices en ECT.
Variables aléatoires discrètes finies.

Exercice 1. Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

1. On suppose dans cette question que les tirages sont sans remise.
   Déterminer la loi de B (resp. N) puis calculer $E(B), V(B)$ (resp. $E(N), V(N)$).
   Les variables B et N sont-elles indépendantes ?
2. Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 2. Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce obtenir la première boule blanche. Soit B le nombre de tirages nécessaires.
   Expliciter la loi de B, son espérance et son écart-type.
2. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires.
   Expliciter la loi de X, son espérance et son écart-type.

Exercice 3. On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'a ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la var "nombre de tirage effectués".
Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 4. On considère une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules noires et 5 boules jaunes. On pioche successivement et avec remise six boules au maximum jusqu'à l'obtention de la première boule jaune. On note X la variable aléatoire égale au "nombre de tirage effectués". Par exemple, si l'on a obtenu la première boule jaune à la quatrième pioche alors $X = 4$, si l'on n'a pas obtenu de boule jaune à l'issue de la sixième pioche alors $X = 6$.
Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5. Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de Champagne. On fixe un entier $n \in [\![1, 25]\!]$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles découvertes.
Déterminer la loi de probabilité de X_n.

Exercice 6. On lance n fois consécutives une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est p et celle d'obtenir "face" est $q = 1 - p$.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Donner la loi de X_2.
2. Donner la loi de X_3. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.

3. Trouver la loi de X_4. Calculer $E(X_4)$.

Exercice 7. On tire, avec remise, cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotés de 1 à 10. On note X la var égale au maximum des deux numéros obtenus et Y la var égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer soigneusement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $P(Y \geqslant k)$ pour $k \in Y(\Omega)$.
   En déduire les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Donner $N(\Omega)$ et calculer $\forall k \in N(\Omega), \quad P(N \geqslant k+1)$.
2. En déduire la loi de N ainsi que son espérance.

Exercice 9. On tire simultanément r jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n $(r \leqslant n)$. On note $X_{n,r}$ la var égale au maximum des r numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de $X_{n,r}$ pour n et r quelconques avec $1 \leqslant r \leqslant n$.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$.
3. Vérifier que $r\binom{k}{r} = k\binom{k-1}{r-1}$. En déduire l'espérance de $X_{n,r}$