Exercices en MPSI-MP.
Algèbre bilinéaire.

Exercice 1. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E. On dit que :

1. u est positif si :
$$\forall x \in E, \quad (u(x)/x) \geqslant 0.$$
On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs.
2. u est défini positif si :
$$\forall x \in E, \quad (u(x)/x) > 0.$$
On note $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques défini positifs.

Dans toute la suite soit u un endomorphisme symétrique.
Montrer que :

1. u est positif $\Leftrightarrow$ les valeurs propres de u sont positives.
2. u est défini positif $\Leftrightarrow$ les valeurs propres de u sont strictement positives.
3. $S^{++}(E) = S^+(E) \cap GL(E)$.

Exercice 2. Soit E un espace préhilbertien réel et $(a_1, a_2, ..., a_n)$ une famille de vecteurs de E, on appelle **matrice de Gram** de la famille $(a_1, a_2, ..., a_n)$ la matrice carrée :

$$G(a_1, a_2, ..., a_n) = ((a_i/a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Montrer que :

1. La matrice de Gram $G(a_1, a_2, ..., a_n)$ est symétrique positive et inversible si, et seulement si, la famille $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est libre.
2. $\forall x \in E$ et $(a_1, a_2, ..., a_n)$ une base d'un sous-espace vectoriel F de E, on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{det(G(a_1, a_2, ..., a_n, x)}{det(G(a_1, a_2, ..., a_n))}}.$$