Exercices en MP.
Topologie des espaces vectoriels normés.

Exercice 1. Norme sur un espace de polynômes.
On se donne $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et on considère $N_f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] : N_f(P) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x).P(x)|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que N_f soit une norme.

Exercice 2. Norme sur un espace de fonctions.
On note $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on note : $N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\ dt}$.

1. Montrer que N est une norme sur E et que $\forall f \in E, ||f||_\infty \leqslant \sqrt{2}.N(f)$.
2. Les normes N et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et $g \in E$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x).g(x)|.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme sur E.
2. Si pour tout $x \in [0,1]$: $g(x) \neq 0$ montrer que N et $||.||_\infty$ sont des normes sur E équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la proposition précédente.

Exercice 4. Distance à une partie.
Soit $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme de la convergence uniforme $||.||_\infty$. Déterminer la distance de la suite $e = (1)_n$ constante égale à 1 au sous-espace vectoriel des suites réelles convergentes vers 0.

Exercice 5. Sous espace vectoriel ouvert.
Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé E est ouvert alors $F = E$.

Exercice 6. Distance dans un espace de fonctions.
Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ normé par $||.||_\infty$ et A la partie définie par :

$$A = \{f \in E / f(0) = 0 \ et \ \int_0^1 f(t)\ dt \geqslant 1\}.$$

1. Montrer que A est une partie fermée d E.
2. Vérifier que : $\forall f \in A,\ ||f||_\infty > 1$.
3. Calculer la distance de la fonction nulle à A.

Exercice 7. Densité dans un espace de matrices.
Montrer que $Gl_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8. Topologie et convexité.
Soit A une partie convexe d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E.
On rappelle qu'une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dite convexe si, et seulement si :

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1]\ :\ t.x + (1-t).y \in A.$$

1. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.
2. La partie $\overset{\circ}{A}$ est-elle convexe ?

Exercice 9. Valeurs d'adhérence.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé est un fermé.

Exercice 10. Norme de Hölder sur $\mathbb{K}^n$
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in]1, +\infty[$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que : $\forall (a, b) \in {\mathbb{R}^+}^2$, $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. On notera $||.||_p$ l'application définie sur $\mathbb{K}^n$ par :
$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n, ||(x_1, ..., x_n)||_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$
et de même pour $||.||_q$.
2. Montrer que : $\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$:
   — $|\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}| \leqslant ||x||_p ||y||_q$.
   — $||x + y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$.
3. En déduire que $||.||_p$ est une norme appelée norme de *Hölder*.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$: $||x||_p$ tend quand p tend vers $+\infty$ vers $||x||_\infty$.

Exercice 11. Norme sur un espace de Fonctions lipschitziennes.
On note E l'ensemble des fonctions Lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0, pour $f \in E$ on définit l'ensemble $L(f)$ par :
$$L(f) = \{k \geqslant 0 / \forall (s, t) \in [0, 1]^2 : |f(s) - f(t)| \leqslant |s - t|\}$$
On pose alors : $N(f) = \inf(L(f))$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $N : E \to \mathbb{R}$ est bien définie et est une norme sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$ on a : $||f||_\infty \leqslant N(f)$.
3. Montrer que $||.||_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n sur $[0, 1]$ par :
$$\forall t \in [0, 1 - \frac{1}{n}], f_n(t) = 1 - \sqrt{1 - t} \text{ et } \forall t \in [1 - \frac{1}{n}], f_n(t) = 1 - \sqrt{\frac{1}{n}}.$$
Montrer que la suite (f_n) converge dans $\mathcal{C}^o([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie mais pas dans E muni de la norme N.

Exercice 12. Projection.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^k)_k$ converge vers la matrice P. Montrer que P est une matrice d'une projection.

Exercice 13. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme N_∞ et $F = \{f \in E / f(0) = f(1)\}$.
Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.

Exercice 14. Continuité des Polynômes de Lagrange.
Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. A $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on fait correspondre le polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $P(x_i) = y_i$.

1. Montrer que l'application $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto P$ est continue.
2. Montrer que l'application réciproque est aussi continue.

Exercice 15. ENSI PSI 1998.
Soit $C(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme : $\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Soit l'application :

$$L_{C(\mathbb{R})}(u) = \lim_{n \to \infty} u_n.$$

Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme.