Exercices en MP.
Structures algèbriques.

Exercice 1. Quel est le plus petit entier n tel qu'il existe un groupe non commutatif de cardinal n ?

Exercice 2. Soient a et b deux éléments d'ordre respectifs p et q d'un groupe abélien $(G, .)$. On suppose que p et q sont premiers entre eux.

1. Montrer que l'élément $a.b$ est d'ordre $p.q$.
2. On ne suppose plus p et q premiers entre eux. L'élément $a.b$ est-il nécessairement d'ordre $p \vee q.$?

(b)

Exercice 3. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + i.b/a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau pour l'addition et la multiplication des nombres complexes.
2. Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$ on pose : $N(z) = |z|^2$, vérifier que :
$$\forall z, z' \in \mathbb{Z}[i] : N(z.z') = N(z).N(z') \quad et \quad N(z) \in \mathbb{N}.$$
3. Déterminer les éléments inversibles de l'anneau : $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\phi(n)$ le nombre des éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Etablir que :
$$\forall a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* : \quad a^{\phi(n)} = 1.$$

Exercice 5. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. On note :
$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b.\sqrt{d}/(a, b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$
Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ est un corps.

Exercice 6. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p premier.

1. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{K},\ (a + b)^p = a^p + b^p$.
2. En déduire que l'application $x \to x^p$ est un automorphisme du corps $\mathbb{K}$ appelé automorphisme de Frobenius.

Exercice 7. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Calculer :
$$\prod_{x \in \mathbb{K} - \{0\}} x.$$

Exercice 8. Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif et N l'ensemble des éléments nilpotents de A c'est à dire des $x \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant : $x^n = 0_A$.
Montrer que N est un idéal de A.

Exercice 9. Soit A un anneau et $I,\ J$ deux idéaux de A. On note :
$$\sqrt{I} = \{x \in A \ tq \ \exists n \in \mathbb{N} \ tq \ x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I + J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}$.

Exercice 10. Soit A un anneau intègre. Un idèal I est dit maximal si $I \subseteq J$ avec J idèal implique que $J = A$ ou $J = I$.
Déterminer les idéaux maximaux de Z puis de $R[X]$.