Exercices en MPSI.
Algèbre linéaire.

Exercice 1. Soit $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de polynomes de degrés deux à deux distincts de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.
2. Si $deg(P_k) = k \ \forall k \in [|0; n|]$, montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $Ker(u) = Im(u)$ si et seulement si $u \circ u = 0$ et $dim(E) = 2rg(u)$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f \circ f = -Id_E$. Montrer que n est pair.

Exercice 4. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$: $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que : $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que : $f^n = 0$.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Etudier l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\alpha.X + Tr(X).A = B$$

.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Qu'en déduire pour f ?
2. Déterminer une base de $Ker(f)$ et $Im(f)$.

Exercice 8. Montrer que toutes les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont de la forme $M \mapsto Tr(A.M)$, pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de Vandermonde $V(a_1, a_2, ..., a_n)$ ou :

$$V(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*, a, b, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ et :

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} x_1 & a & . & . & . & a \\ b & x_2 & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & a \\ b & . & . & . & b & x_n \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(\Delta_n)$.

Prépas Maths 360.