Exercices en MPSI.
Dénombrement.

Exercice 1. Parmi quarante secrétaires, 8 connaissant le russe, 15 l'anglais et 9 l'allemand. D'autres part, 4 parlent l'anglais et l'allemand, 5 l'anglais et le russe, 2 l'allemand et le russe et 2 parlent les trois langues.
Combien de secrétaires ne connaissent aucune de ces trois langues ?

Exercice 2. Le but de l'exercice est de démontrer de deux facons différentes la célébre formule dite de Vandermonde :

$$\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

1. On considère deux ensembles finis et disjoints A et B de cardinaux respectifs p et q et on définit $E = A \cup B$.
   (a) Déterminer la cardinal de E.
   On note $C(n, p+q)$ l'ensemble des parties de E à n éléments.
   (b) Quel est la cardinal de $C(n, p+q)$?
   (c) Soit $k \in [|0, n|]$.
   On note $C_k(n, p+q)$ les parties $M \in C(n, p+q)$ telles que $Card(M \cap A) = k$.
   Montrer que :
   $$C_k(n, p+q) \simeq C(k, p) \times C(n-k, q).$$
   où $C(k, p)$ (resp. $C(n-k, q)$ désigne l'ensemble des parties de A (resp B) à k (resp. $n-k$) éléments.
   (d) En déduire le cardinal de $C_k(n, p+q)$.
   (e) En discutant suivant le cardinal de l'intersection d'une partie $M \in C(n, p+q)$ avec A, démontrer la formule de Vandermonde.
2. On considére les polynômes : $R(x) = (1+x)^{p+q}$, $P(x) = (1+x)^p$ et $Q(x) = (1+x)^q$.
   (a) Utilisez la formule du binôme pour identifier le coefficient de x^n dans $R(x)$.
   (b) Retrouver ce coefficient dans le produit $P(x) \times Q(x)$.
   (c) Conclure.

Exercice 3. Une urne contient n boules distinctes numérotées de 1 à n. On effectue un tirage de p boules, p étant un entier naturel compris entre 1 et n.

1. On suppose dans cette question que les p boules sont extraites simultanément.
   (a) Combien y-a-t-il de tirages différents possibles ?
   (b) Soit k un entier tel que : $p \leqslant k \leqslant n$. Déterminer le nombre de tirages tels que :
      i. Toutes les boules obtenues ont un numéro inférieur ou égal à k.
      ii. Le plus grand numéro est k.
   (c) En déduire :
   $$\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$
2. On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et sans remise.
   (a) Combien y-t-il de tirages possibles ?

Prépas Maths 360.

   (b) Combien y-t-il de tirages commencant par la boule numéro 2 ?
3. On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et avec remise.
   (a) Combien y-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y-t-il de tirages pour lesquels le premier numéro obtenu est strictement inférieur au dernier ?
   (c) Combien y-t-il de tirages pour lesquels la somme des numéros obtenus est $p+2$?
   (d) Combien y-t-il de tirages pour lesquels 2 numéros exactement sont apparus ?

Exercice 4. Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit $E_{n,p}$ l'ensemble des p-uplets $(a_i)_{1\leqslant p}$ d'entiers naturels vérifiant :

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < ... < a_p \leqslant n+p-1$$

et $F_{n,p}$ l'ensemble des p-uplets $(b_i)_{i\leqslant p}$ d'entiers naturels vérifiant :

$$1 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_p \leqslant n.$$

1. Montrer que l'application ϕ qui au p-uplet $(a_i)_{1\leqslant p}$ associe le p-uplet $(a_i-i+1)_{1\leqslant p}$ est une bijection de $E_{n,p}$ vers un ensemble que l'on déterminera.
2. En déduire le cardinal de $E_{n,p}$ et de $F_{n,p}$.
3. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$?
4. Quel est le nombre d'applications croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$?

Exercice 5. Une urne contient n boules rouges et m boules blanches $(n;m\in\mathbb{N}^*)$, et on considére tous les tirages possibles de ces boules une à une et sans remise. Combien y a-t-il de tels tirages ? En classant les tirages en fonction du rang d'apparition de la dernière boule rouge, trouver la somme :

$$\sum_{k=n}^{n+m}\begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et de n casiers numérotés de 1 à n $(n\in\mathbb{N}^*)$. On répartit les n boules entre les n casiers (une boule par casier). On dit qu'une boule est bien rangée lorsqu'elle est dans le casier portant son numéro. Inversement, une boule est dérangée si elle n'est pas dans le casier portant son numéro. On va compter, parmi toues les répartitions possibles, celles pour lesquelles toutes les boules sont dérangées : une telle répartition s'appelle un dérangement. Soit donc D_n le nombre de dérangements lorsqu'on a n boules et n casiers.

1. Que valent $D_1,\ D_2$ et D_3 ?
2. En classant les répartitions des n boules entre les n casiers en fonction du nombre de boules qui sont bien rangées, montrer que :

$$n! = 1+\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.D_k.$$

3. En déduire D_4, D_5, ..., D_8.
4. Le facteur a 8 imprimés de déclarations d'impôts à répartir entre les 8 boites aux lettres d'un immeuble. De combien de facons peut-il les répartir de sorte qu'aucun imprimé ne parvienne à son destinataire ?

Exercice 7. Il faut ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques distincts, 6 livres de philosophie distincts et 2 livres de géographie distincts. De combien de facons peut-on effectuer ce rangement dans les cas suivants :

1. Les livres doivent être groupés par matières.
2. Les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

Prépas Maths 360.

Exercice 8. On range p boules discernables dans n cases indiscernables.
Soit D_n^p le nombre de rangements possibles tels qu'aucune case ne soit vide ($p \geqslant n$).

1. Montrer que :
$$D_n^p = n.D_n^{p-1} + D_{n-1}p - 1, avec \ \ p \geqslant n+1.$$
2. Calculer : $D_n^n, \ n \geqslant 1$ et $D_{p-1}^p, \ \ p \geqslant 2$.

Exercice 9. Soit n, p et q des entiers naturels. Soit A l'ensemble des mots de $(p+q+1)$ lettres composés à l'aide des lettres E, C.

1. Déterminer $card(A)$.
2. Soit A' l'ensemble des éléments de A contenant au moins $p+1$ fois la lettre E. Etant donné un entier $k \in [|1q+1|]$, on note A'_k l'ensemble des éléments de A' dont la $(p+1)^{ime}$ "E" se trouve en $(p+k)^{ime}$ position.
   (a) Déterminer $card(A'_k)$.
   (b) En déduire $card(A')$ sous forme d'une somme.
3. On note A" l'ensemble des éléments de A contenant au moins $q+1$ fois la lettre "C". Déterminer $card(A")$.
4. En déduire al relation :
$$\sum_{k=0}^{q} \begin{pmatrix} p+k \\ p \end{pmatrix} .2^{q-k} + \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} q+k \\ q \end{pmatrix} .2^{p-k} = 2^{p+q+1}.$$
   Puis l'égalité :
$$\sum_{k=p}^{2p} \begin{pmatrix} k \\ 2p \end{pmatrix} .2^{2p-k} = 2^{2p}.$$

Exercice 10. Soit n un entier naturel non nul. On note S l'ensemble des surjections de l'ensemble E vers l'ensemble F. On suppose que : $card(E) = n+3$ et $card(F) = n$.
Déterminer $card(S)$.

Prépas Maths 360.