Exercices en PCSI-MPSI.
Nombres complexes.

Exercice 1. Résoudre l'équation $(\frac{1+iz}{1-iz})^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2. Résoudre l'équation $\sin(4x) - \sqrt{3}\sin(3x) + 2\sin(2x) = 0$

Exercice 3. Soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$

Exercice 4. On considère l'équation $(E) : z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1. Résoudre cette équation en posant $Z = z + \frac{1}{z}$
2. Montrer que les racines $5^{ème}$ (sauf 1) sont solutions de (E). En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

Exercice 5.
1. Résoudre l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
2. Montrer que $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos(\frac{a-b}{2})e^{i(\frac{a+b}{2})}$ et $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin(\frac{a-b}{2})e^{i(\frac{a+b}{2})}$.
3. Retrouver ainsi des formules trigonométriques remarquables.
4. Résoudre l'équation $1 + (\frac{i-z}{i+z}) + (\frac{i-z}{i+z})^2 + (\frac{i-z}{i+z})^3 + (\frac{i-z}{i+z})^4 = 0$.

Exercice 6.
1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que $P_n(X + \frac{1}{X}) = X^n + \frac{1}{X^n}$
2. En déduire $\cos(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{2\pi}{3})$ et $\cos(\frac{2\pi}{5})$

Exercice 7. Soient $z_1, .., z_n$ n nombres complexes

1. Montrer que $\mid \sum_{k=0}^{n} z_k \mid \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mid z_k \mid$
2. A quelle condtion a-t-on l'égalité (on traitera pour commencer le cas $n = 2$) ?

Exercice 8. On pose $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left|\zeta^k - 1\right|$

Exercice 9. Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$ soit un nombre entier positif.

Exercice 10. Soient $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mid z \mid < 1\}$.

1. Montrer que $\forall z \in \Pi,\ \dfrac{z-i}{z+i} \in D$.
2. Montrer que l'application $f : \begin{array}{c} \Pi \to D \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$ est une bijection puis calculer sa réciproque.

Exercice 11. Simplifier l'expression $\dfrac{\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10}{\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)}$

Exercice 12.
1. Soit z un nombre complexe différent de 1, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ \sum\limits_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \dfrac{i - ni^n - (n+1)i^{(n+1)}}{2}$
3. En déduire les sommes
$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1)$ et $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)}2p$.

Exercice 13. Résoudre l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0$