Exercices en PCSI-MPSI.
Matrices.

Exercice 1. Calculer A^n lorsque

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}_p$

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(A - 6I_3)\left(A^2 - 3I_3\right) = 0_3$
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\exists P_n \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $A^n = P_n(A)$

Exercice 3. Soient u, v, w les suites définies par $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$
$v_{n+1} = 3v_n + 2w_n$ et $w_{n+1} = v_n + 2w_n$.
On suppose que $u_0 \geqslant 0$, $v_0 = u_0$ et $w_0 = 1$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ puis $\forall n \geqslant 0$, $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$
   (b) Montrer que $A = PDP^{-1}$ puis que $\forall n \geqslant 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$
   (c) En déduire v_n, w_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4. Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A - 6I_3)\left(A^2 - 3I_3\right) = 0_3$.
2. Déterminer une matrice B telle que $AB = BA = I_3$
3. Calculer A^n

Exercice 5. Calculer A^n lorsque n est un entier positif et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $(\varphi(P))(X) = P(X+1)$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$
2. A l'aide de φ^{-1}, déterminer A^{-1}

3. Application.
   On veut dénombrer l'ensembles des surjections de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$ (avec $n \geqslant p$)
   On note
   · $F_{n,p}$ l'ensemble des applications de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$
   · $S_{n,p}$ l'ensembles des surjections de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$
   · $F(n,p) = card(F_{n,p})$ et $S(n,p) = card(S_{n,p})$
   (a) Calculer $F(n,p)$.
   (b) Montrer que $F(n,p) = \sum\limits_{k=1}^{p} C_p^k S(n,k)$.
   (c) Vérifier que $\begin{pmatrix} F(n,n) \\ F(n,n-1) \\ \vdots \\ F(n,1) \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S(n,n) \\ \vdots \\ S(n,2) \\ S(n,1) \\ 0 \end{pmatrix}$. En déduire $S(n,p)$

Exercice 7. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Pour quelle valeurs de λ, $A - \lambda I_3 \in GL_3(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $Ker(A - I_3)$ est de dimension 2 et $Ker(A + 3I_3)$ est de dimension 1
3. Soit (e_1, e_2) une base de $Ker(A - I_3)$ et (e_3) une base de $Ker(A + 3I_3)$.
   (a) Montrer que $P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. En déduire A^n

Exercice 8. Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C(A)$ l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $MA = AM$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Expliciter $C(A)$.
   (b) On considère l'équation $(E) : X^2 = A$. Montrer que $X \in C(A)$ et déterminer l'ensemble des solutions de (E).
   (c) Combien y-a-t-il de solutions ? Est-ce normal ?
3. Refaire les questions précédentes avec $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

1. Pour quelles valeurs de λ, $A - \lambda I_3 \in GL_3(\mathbb{R})$?
2. Déterminer selon λ, $Ker(A - \lambda I_3)$ et $Im(A - \lambda I_3)$.