Exercices en PCSI-MPSI.
Polynômes.

Exercice 1. Factoriser $(X+1)^n - e^{2i\alpha}(X-1)^n$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$

Exercice 2. Déterminer les polynômes P tels que le reste de la division de P par
— $(X+1)^3$ soit -5
— $(X-1)^3$ soit 11

Exercice 3. Quelle est la multiplicité de a dans $P(X) = (X-a)^n - X^n - a^n$

Exercice 4. Montrer que $\forall m, n, p, q \geqslant 0$ $X^3 + X^2 + X + 1 \mid X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$

Exercice 5. Soit P un polynôme de la forme $P(X) = X^3 + pX + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$

1. Montrer que P possède une racine double ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$
2. On suppose que P possède 3 racines réelles distinctes.
   (a) Montrer que $4p^3 + 27q^2 < 0$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6. On veut déterminer tous les polynômes P tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X-1). \tag{E}$$

1. Justifier que si z est racine de P alors z^2 et $(1+z)^2$ est racine de P.
2. On supose que z est une racine de P distincte de 0.
   Montrer que $|z| = 1$. (on pourra étudier la suite $z_{n+1} = z_n^2$ avec $z_0 = z$.
3. Montrer que $|z - j| = 1$ si $z \neq j$ et $\left|z - j^2\right| = 1$ si $z \neq j^2$.
4. Déterminer les racines possibles de P
5. En déduire tous les polynômes solutions de (E)

Exercice 7. Déterminer tous les polynômes complexes P tels que $P(1-2X) = P(X)$

Exercice 8. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $3X^4 - 19X^3 + 9X^2 - 19X + 6$

Exercice 9. $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$
Calculer (P, P'). En déduire la factorisation de P.

Exercice 10.
1. Montrer que $(X^5 - 1, X^2 + X + 1) = 1$
2. Déterminer explicitement une relation de Bezout entre $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$

Exercice 11. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $(X-2)(X-3) \mid (X-2)^n + (X-3)^n - 1$

Exercice 12. On pose $P(z) = (z+1)^n - \exp(2ina)$ où a est un nombre réel.

1. Factoriser P
2. En déduire que $1 - \exp(2ina) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k$ puis que $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{k\pi}{n}) = \frac{\sin(na)}{2^n} - 1$.
3. Calculer $\prod_{k=0}^{14} \cos(\frac{k\pi}{15})$

Exercice 13. Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2.
   En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel

Exercice 14. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n.
(indication : on pourra considérer $P(n + P(n))$ et remercier Taylor)