

Exercices en ECT-ECG-PCSI-MPSI.

Probabilités discrètes finies.

Exercice 1. On dispose de deux urnes. La première contient deux boules noires et une boule blanche, et la deuxième contient trois boules noires et deux boules blanches. On tire au hasard une boule de la première urne et on la place dans la deuxième urne. Puis on tire au hasard une boule de la deuxième urne. Quelle est la probabilité que cette deuxième boule soit blanche ?

Exercice 2. Pour traiter une maladie, les médecins disposent de trois nouveaux médicaments MA , MB , MC . Dans un premier cas, les médecins prescrivent indifféremment l'un des trois médicaments pour chaque traitement. Dans un deuxième cas, ils commencent à connaître mieux ces médicaments, et prescrivent MA dans 50% des cas, MB dans 30% des cas, et MC dans 20% des cas. En fait les taux de réussite de ces médicaments sont respectivement de 98%, 96% et 95%. Calculer la probabilité d'échec du traitement dans chaque cas ?

Exercice 3. Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires.

- On tire au hasard 2 fois une boule de l'urne en remettant la boule après le tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 1 boule noire :
 - Dans cet ordre ?
 - Dans un ordre quelconque ?
- Même question si les tirages se font cette fois sans remise.
- On tire simultanément 5 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 3 boules noires ?

Exercice 4. Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines M_1 , M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants.

Le qualitatif estime :

- 2% des composants fabriqués par la machine M_1 sont défectueux.
- 3% des composants fabriqués par la machine M_2 sont défectueux.
- 5% des composants fabriqués par la machine M_3 sont défectueux.

- Faites un arbre qui modélise l'expérience.
- Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse provenant de M_1 ? les événements "la pièce est défectueuse" et "la pièce provient de M_1 " sont-ils indépendants ?
- Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de M_1 ?

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p (avec $p \in]0, 1[$). On pose ($q = 1 - p$). Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, "face" ne soit jamais suivi de "pile" ?

Exercice 6. Un sac contient n boules blanches et $2n$ boules noires.

- On tire simultanément, au hasard, trois boules du sac.
 - Quelle est la probabilité p_n que l'on n'obtienne qu'une seule boule blanche ?
 - Quelle est la probabilité q_n que l'on obtienne au moins une boule blanche ?
 - Déterminer la limite de p_n et q_n quand n tend vers $+\infty$.
- On tire maintenant au hasard avec remise trois boules du sac.
 - Quelle est la probabilité p que l'on n'obtienne qu'une seule boule blanche ?

- (b) Quelle est la probabilité q que l'on obtienne au moins une boule blanche ?
3. On tire maintenant et au hasard simultanément, six boules du sac et k désigne un entier compris entre 0 et 6. Soit $x_{n,k}$ la probabilité d'obtenir exactement k boules blanches. Que dire de la limite de $x_{n,k}$ quand n tend vers $+\infty$. (On commencera par montrer que : $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$.)