

## Problème ECG. Matrices.

### Problème :

Soient la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer les valeurs propres de  $A$  et ses vecteurs propres associés.  
(b) Montrer qu'il existe une matrice  $P$  inversible dont on donnera l'inverse et une matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  toutes deux réelles carrées d'ordre 3 telles que :

$$D = P^{-1}.A.P$$

- (a) Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels commutant avec  $A$ , c'est à dire telle que :  $A.M = M.A$ .  
On pose :  $M' = P^{-1}.M.P$ . Montrer que :  $D.M' = M'.D$ .  
Réciproquement, montrer que si  $M'$  commute avec  $D$  alors la matrice  $M$  définie par :  $M = P.M'.P^{-1}$  commute avec  $A$ .  
(b) Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec  $D$ .  
(c) En déduire la forme générale des matrices commutant avec  $A$ .