Problème ECG.
Intégrales impropres.

Problème :

On considère pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}+^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}$$

pour tout réel x strictement positif.
On définit également sur $\mathbb{R}+^*$ la fonction h par :

$$h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

pour tout x strictement positif.

1. Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}+^*$ et étudier leur signe.
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx$ est convergente et déterminer sa valeur.
   (b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ est convergente.

   Dans toute la suite de l'exercice on note alors K : $K = \int_1^{+\infty} h(x)\ dx$.
3. (a) Montrer, grace au changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ que :
   $$K = -\int_0^1 h(x)\ dx.$$
   (b) En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} |h(x)|\ dx$ converge et est égale à $2K$.
   (c) En déduire également que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ converge et vaut 0.
4. (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif :
   $$|f_n(x)| \leqslant |h(x)|.$$
   En déduire la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt$.
   (b) Montrer que pour tout réel x strictement positif :
   $$h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2}.$$
   (c) En déduire successivement :
   $$0 \leqslant \int_0^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}$$
   et
   $$\frac{-K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}.$$
   (d) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = 0$.