Problème ECG.
Matrices.

Problème :

On considère les matrices réelles carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que J est diagonalisable, que J n'est pas inversible, et que 0 est valeur propre de J.
   (b) Calculer J^2 et exprimer J^2 en fonction de I et de K.
   (c) Calculer les valeurs propres de J et les vecteurs propres associés.
   En déduire que $P^{-1}.J.P$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
   (d) Montrer, en utilisant les questions précédentes que : $P^{-1}.K.P$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'élément suivant de $M_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que M s'exprime simplement à l'aide de I, J, K et a, b, c.
   (b) En déduire que : $P^{-1}.M.P$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
3. Trouver une matrice X de $M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$