Problème ECG.
Matrices.

Problème :

On considére les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \textit{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres de M_a et les vecteurs propres associés.
   (b) Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice diagonale D d'ordre 3 et une matrice réelle inversible P d'ordre 3 telle que : $J = P.D.P^{-1}$.
   (c) En déduire que pour tout nombre réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre 3 que l'on calculera, telle que : $M_a = P.D_a.P^{-1}$.
   (d) Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?
2. On se propose dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice carrée réelle N d'ordre 3 vérifiant : $N^2 = M_a$.
   (a) Soient a un nombre réel et N une matrice carrée réelle d'ordre 3 telle que : $N^2 = M_a$.
      i. Montrer que N commute avec M_a, puis que N commute avec J.
      ii. Montrer que tout vecteur propre de M_a est vecteur propre de N.
      iii. En déduire qu'il existe une matrice carrée réelle Δ d'ordre 3 telle que : $N = P.\Delta.P^{-1}$ et montrer que : $\Delta^2 = D_a$.
      iv. En déduire que : $a \geqslant 2$.
   (b) Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle N d'ordre 3 telle que : $N^2 = M_a$.
   (c) Conclure.