

Problème ECG.

Suites implicites et fonctions.

Problème :

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x - n \cdot \ln(x).$$

1. (a) Etudier la fonction f_n et dresser son tableau de variations.
(b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation : $f_n(x) = 0$ et vérifier que : $0 < u_n < n < v_n$.
2. **Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.**
 - (a) Montrer que : $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
 - (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
 - (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 - (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (u_n - 1) = 1$.
3. **Etude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.**
 - (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 - (b) Calculer $f_n(n \cdot \ln(n))$ puis montrer que : $\forall n \geq 3, n \cdot \ln(n) < v_n$.
 - (c) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = x - 2 \cdot \ln(x)$.
Etudier g et donner son signe. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \cdot \ln(n)$.
 - (d) En déduire le signe de $f_n(2 \cdot n \cdot \ln(n))$, puis établir que : $n \cdot \ln(n) < v_n < 2 \cdot n \cdot \ln(n)$.
 - (e) Montrer enfin que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$.