

Problème ECG.
Variables à densité.

Problème :

1. Déterminer l'ensemble D des réels tels que : $e^x - e^{-x} > 0$.
On définit la fonction f par : $\forall x \in D, f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j) .
2. (a) Etudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D .
(b) En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α .
(c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.
3. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.
(b) En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
(c) Donner la position relative de (C) et (Δ) .
4. Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T) .
On admettra que $\alpha \simeq 0.5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2.2$.
5. Soit λ un réel, on note g_λ la fonction définie par : $g_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \alpha; \\ \frac{\lambda}{e^{2x}-1}, & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$
 - (a) On pose : $h(x) = f(x) - x$. Après avoir calculé $h'(x)$, déterminer λ en fonction de α pour que g_λ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X .
 - (b) Donner la fonction de répartition G_λ de X .