Problème ECG.
Variables à densité.

Problème :

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx$ est convergente et donner sa valeur.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2.(1+|x|)^2}.$$

   (a) Montrer que f est paire.

   (b) Montrer que f peut etre considèré comme une fonction densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable alèatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$ admettant f comme densité et on note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$.

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

   (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1), & \text{si } x \geqslant 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramétre.