Problème ECG.
Matrices.

Problème :

Un joueur lane une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois ou, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs sont été différents.
On peut appeler X_N le nombre de changement au cours des N premiers lancers.
Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donnée successivement :
Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile.
Alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre chagements, au 3^{ime}, 4^{ime}, 5^{ime} et 8^{ime} lancers.)

1. Jusitifier que $X_N(\Omega) = \{0, 1, ..., N-1\}$.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.
3. Montrer que : $P(X_N = 0) = (\frac{1}{2})^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1)(\frac{1}{2})^N$.
4. (a) Justifier que pour tout entier k de $\{0, 1, ..., N-1\}$:
   $$P_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier k de $\{0, 1, ..., N-1\}$:
   $$P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$
   (c) En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que :
   $$P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}.$$
   (d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.
5. (a) Montrer grace aux résultats des questions précedentes que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
   (b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi Binomiale $B(N-1, \frac{1}{2})$.
   En déduire la variance $V(X_N)$.