Problème ECT.
Fonctions, suites et intégrales.

Problème :

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-x\ln(x)}{1+x^2}, & \text{si } x > 0\,; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. (a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Etudier le signe de $f(x)$.
2. Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}^+$, en posant :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
3. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on pose : $g(x) = F(x) - x$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme : $g'(x) = \frac{-xh(x)}{1+x^2}$ ou h est une fonction à expliciter.
   (b) Etudier les variations de h, puis en déduire son signe.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$.
4. On définit la suite $(u_n)_n$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.
   (a) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]$.
   (b) Montrer, en utilisant le résultat de la troisème question, que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.