Problème ECT.
Sommes, séries et probabilités.

Problème :

1. Soit $x \in]-1;1[$.
   (a) Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $]-1;1[$:
   $$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$
   (b) En déduire, que pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:
   $$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.$$
   (c) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$:
   $$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}.$$
   (d) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme : $-\ln(1-x)$.
   En particulier, montrer que :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2).$$
2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
   Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?